

1. Evaluar las siguientes integrales iteradas, de funciones de dos variables:

a) $\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2 + 1) dx dy$

b) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\theta} (3r^2 \sin\theta) dr d\theta$

c) $\int_0^3 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+y^2} dy dx$

d) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (y - \sqrt{x}) dy dx$

Respuestas. a) $\frac{20}{3}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $-\frac{1}{10}$

2. Calcular las siguientes integrales dobles:

a) $\iint_D (x^2 + 4y) dx dy$, siendo $D = [0, 2] \times [0, 3]$

b) $\iint_D x^y dx dy$, siendo $D = [0, 1] \times [0, 1]$

Respuestas. a) 44 b) $\ln(2)$

3. Sea $f(x, y) = \frac{x}{(1+y)^2}$.

a) Encontrar el valor aproximado de $\iint_D f(x, y) dx dy$, siendo $D = [0, 1] \times [0, 1]$, mediante sumas de Riemann, definiendo en el cuadrado D una partición de 9 subcuadrados congruentes, y eligiendo el vértice superior izquierdo de cada subcuadrado.

b) Determinar el valor exacto de $\iint_D f(x, y) dx dy$.

4. Calcular el valor de $\iint_D \sqrt{x} \cos(y\sqrt{x}) dA$, siendo R la región del plano XY limitada por los planos: $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, e $y = \sqrt{x}$.

Respuesta. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Para cada una de las siguientes integrales iteradas, representar gráficamente la región de integración; cambiar el orden de integración; y luego evaluar cada una de ellas:

a) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy$

b) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dx dy$

c) $\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2} dy dx$

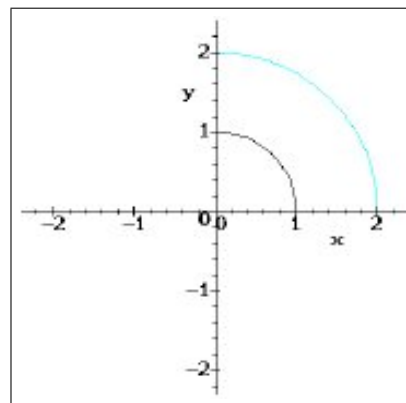
d) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \sin(x) dx dy$

Respuestas. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{32}{3}$ c) $\frac{1 - e^{-4}}{2}$ d) $\approx 1,85777$

6.

Considerar la región D que se encuentra en el primer cuadrante, comprendida entre los dos círculos centrados en el origen, de radios 1 y 2 respectivamente, representada en la figura:

Escribir la integral doble de una función general $f(x, y)$ sobre la región D , como una integral iterada con respecto a x y a y .



7. Calcular la integral doble de la función $f(x, y) = x^3y^2 + xy$ sobre la región D limitada por las curvas $g(x) = x^2 + x$ y $h(x) = x^3 - x$, para x no-negativa.

Respuesta. $\approx 60,85434565$

8. Calcular el volumen de la región sólida que se encuentra en el primer octante, bajo la superficie $z = f(x, y) = 1 - y - x^2$.

Respuesta. $\frac{4}{15}$

9. Calcular el volumen del sólido en el espacio.

- a) Sólido limitado por: $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$.
- b) Sólido bajo la superficie $z = xy$ y sobre la región del triángulo del plano XY con vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ y $(1, 2)$.
- c) Sólido limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.
- d) Sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y los planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$, en el primer octante.

Respuesta. a) $\frac{32}{3}$ b) $\frac{31}{8}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$

10. Calcular el volumen de la esfera de radio r cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, mediante integrales dobles.

Respuesta. $\frac{4}{3}\pi r^3$

11. Evaluar las siguientes integrales iteradas (de funciones de 3 variables):

(i) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 z^2 dx dy dz$

(ii) $\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_y^{\sqrt{y^2 - 9x^2}} z dz dx dy$

$$(iii) \int_0^{\pi/2} \int_0^{y/2} \int_0^{1/y} \sin y \, dz \, dx \, dy$$

Respuestas: (i) $\frac{8}{27}$ (ii) $\frac{729}{4}$ (iii) $\frac{1}{2}$

12. Dibujar el sólido cuyo volumen representa la integral triple y reescribir ésta en el orden de integración que se especifica:

$$(i) \int_0^4 \int_0^{(4-x)/2} \int_0^{(12-3x-6y)/4} dz \, dy \, dx. \quad \text{Reescribir usando el orden } dy \, dx \, dz.$$

$$(ii) \int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \, dx \, dy. \quad \text{Reescribir usando el orden } dz \, dy \, dx.$$

Respuestas: (i) $\int_0^3 \int_0^{(12-4z)/3} \int_0^{(12-4z-3y)/6} dy \, dx \, dz$ (ii) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \, dy \, dx$

13. Hacer la lista de los 6 órdenes posibles de integración, para la integral triple $\int \int \int xyz \, dV$, sobre el sólido $Q = \{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 3 \}$

Respuestas: $\int_0^1 \int_0^x \int_0^3 xyz \, dz \, dy \, dx$ $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^3 xyz \, dz \, dx \, dy$ $\int_0^1 \int_0^3 \int_0^x xyz \, dy \, dz \, dx$
 $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^x xyz \, dy \, dx \, dz$ $\int_0^3 \int_0^1 \int_y^1 xyz \, dx \, dy \, dz$ $\int_0^1 \int_0^3 \int_y^1 xyz \, dx \, dz \, dy$

14. Usar una integral triple para calcular el volumen del sólido limitado por:

$$(i) x = 4 - y^2, z = 0, z = x, \quad (ii) z = 9 - x^2 - y^2, z = 0,$$

$$(iii) z = 9 - x^2, y = 2 - x, y = 0, z = 0, x \geq 0$$

Resp: (i) $\frac{256}{15}$

$$(ii) \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} dz \, dy \, dx = 4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} dz \, dy \, dx = \frac{81\pi}{2} \approx 127,234$$

$$(iii) \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{9-x^2} dz \, dy \, dx = \frac{50}{3} \quad \textbf{Nota:} \text{ Todos los resultados son (unidades de longitud)}^3$$

15. Cambiando a coordenadas polares, calcular las siguientes integrales dobles.

$$(i) \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y \, dx \, dy \quad (ii) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \quad (iii) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, dy \, dx$$

Respuestas: (i) $a^3/3$ (ii) $\approx 8,98462$ (iii) $2/3$

16. Calcular cada una de las siguientes integrales triples.

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r \cos \theta \, dr \, d\theta \, dz & \text{(ii)} \quad & \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos^2 \theta} \int_0^{4-r^2} r \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta \\
 \text{(iii)} \quad & \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^2 e^{-\rho^2} \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\phi & \text{(iv)} \quad & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi
 \end{aligned}$$

Respuestas: (i) 8 (ii) 52/45 (iii) $\frac{\pi^2}{6}(1 - e^{-8})$ (iv) 0

17. Pasar cada una de las siguientes integrales en coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y esféricas. Calcular la integral más simple.

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x \, dz \, dy \, dx & \text{(ii)} \quad & \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx
 \end{aligned}$$

Respuestas:

(i) Cilíndricas: $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta$, Esféricas: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \sec \phi} \rho^3 \sin^2 \cos \theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$,
0.

(ii) Cilíndricas: $\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r \sqrt{r^2+z^2} \, dz \, d\theta \, dr$, Esféricas: $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta$,
 $\pi/8$.

18. Usar un cambio de variables apropiado para calcular el volumen del sólido comprendido bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región plana R .

(i) $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$, R región acotada por el cuadrado de vértices $(4, 0)$, $(6, 2)$, $(4, 4)$ y $(2, 2)$.

(ii) $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2y^2}$, R la región acotada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$. Sugerencia: Hacer $x = u$, $y = v/u$.

Respuestas: (i) $12(e^4 - 1)$ (ii) $\approx 1,48338$