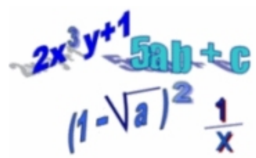
Introducción

En esta sección se revisarán los conceptos básicos y la operatoria con expresiones algebraicas. Posteriomente se tratarán de manera especial los temas: productos notables, factorización y racionalización de expresiones.



Expresiones algebraicas

Definición. Una *expresión algebraica*, en una o más variables (letras), es una combinación cualquiera de estas variables y de números, mediante una cantidad finita de operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación o radicación.

Ejemplos de expresiones algebraicas:

$$2x^3y+1 \qquad \sqrt{a-3ab} \qquad \frac{\sqrt{x+y}-4}{(x+2)^2-\sqrt{x}}$$

Observaciones.

1. La notación $3ab$ significa $3\cdot a\cdot b$. En general, se coloca el signo de la multiplicación cuando se expresa el producto entre números, como por ejemplo $4\cdot 3$.
2. Las expresiones algebraicas aparecen en diversos campos: geometría, física, economía, etc. Por ejemplo, el área de una circunferencia en términos de su radio r: $A=2\pi r^2$, la fórmula de interés simple en términos de la cantidad inicial C, la tasa de interés i y del tiempo t: $I=C\,i\,t$.

Conceptos básicos

Término	Es cada sumando, o cada parte, en una expresión algebraica, separada por $+$ o $-$. **Nota.** Expresiones algebraicas que constan de un solo término se llaman *monomios*, con dos términos se llaman *binomios*, etc.
Coeficiente	Cada término consta de: un factor numérico y un factor literal. El factor numérico de un término se denomina **coeficiente numérico** o simplemente coeficiente.
Términos semejantes	Son los términos que tienen el mismo factor literal (se diferencian sólo en su coeficiente numérico).

Por ejemplo, en la expresión $5xy^2 - 3xy + 2xy^2 - 7$: el coeficiente numérico del término $5xy^2$ es 5; los términos $5xy^2$ y $2xy^2$ son términos semejantes.

Evaluación de una expresión algebraica.

Cuando se sustituye por números cada una de las variables de una expresión (para los cuales está definida) y se realizan los cálculos, el número que se obtiene es el **valor de la expresión** para dichos reemplazos.

Ejemplo

- Evaluar la expresión $\dfrac{a^2 - 2ab}{a^3 - b^3}$ para $a = 1$ y $b = -1$.

  Solución

  $$\frac{a^2 - 2ab}{a^3 - b^3} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1)}{1^3 - (-1)^3} = \frac{1 + 2}{1 - (-1)} = \frac{3}{2}$$

Expresiones equivalentes.

Dos expresiones que tienen el mismo valor para todas las sustituciones, para las cuales están definidas, se dice que son expresiones equivalentes.

Ejemplo

- Las expresiones: $4(a + 5b)$ y $4a + 20b$, son equivalentes para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Esto se expresa: $4(a + 5b) = 4a + 20b$.
- $\dfrac{5x + x^2}{x} = 5 + x$, para todo $x \neq 0$.

Operaciones con expresiones y propiedades

La suma y el producto de expresiones algebraicas son expresiones algebraicas. Las operaciones de adición y multiplicación satisfacen las mismas propiedades que la operatoria con números.

Diferencia. $a - b = a + (-b)$.

Multiplicación. $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

Simplificación. Utilizando propiedades de las operaciones y agrupando los *términos semejantes*, una expresión algebraica se puede *transformar* en una expresión más simple, o *simplificar*.

Ejemplos

- Simplificar la expresión: $(2x - y) - (-3x - 2y + 5)$

  Solución.
  $$\begin{aligned}(2x - y) - (-3x - 2y + 5) &= (2x - y) + (-1)(-3x - 2y + 5)\\ &= 2x - y + 3x + 2y - 5 = 5x + y - 5\end{aligned}$$

- Simplificar la expresión: $\dfrac{2x}{3x^2 - 5xy}$

  Solución. $\dfrac{2x}{3x^2 - 5xy} = \dfrac{2}{3x - 5y}$, para todo $x \neq 0$.

Expresiones algebraicas racionales

Adición	$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$
Multiplicación	$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
División	$\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$