1. Resolver la ecuación: $(2x-3)(x+4)=21(x-2)$

   Solución:

$$
\begin{aligned}
(2x-3)(x+4)=21(x-2) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x^2+5x-12=21x-42\\
&\Longleftrightarrow \quad x^2-8x+15=0\\
&\qquad \left[\begin{array}{l}\text{coeficientes de la ec. cuadrática:}\\ a=1, \quad b=-8, \quad c=15\\ \textit{Discriminante}\\ =(-8)^2-4\cdot 1\cdot 15=4>0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1}\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{8\pm 2}{2}\\
&\Longleftrightarrow \quad x=5 \vee x=3
\end{aligned}
$$

   Respuesta:

   Las soluciones de la ecuación son: $x=5, \quad x=3.$

   El conjunto solución de la ecuación es: $S=\{5,\ 3\}.$

2. Resolver la ecuación: $8(2x+1)(x-5)=-121$

   Solución:

$$
\begin{aligned}
8(2x+1)(x-5)=-121 \quad &\Longleftrightarrow \quad 16x^2-72x-40=-121\\
&\Longleftrightarrow \quad 16x^2-72x+81=0\\
&\qquad \left[\begin{array}{l}\text{coeficientes de la ec. cuadrática:}\\ a=16, \quad b=-72, \quad c=81\\ \textit{Discriminante}\\ =(-72)^2-4\cdot 16\cdot 81=0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{72\pm\sqrt{0}}{32}\\
&\Longleftrightarrow \quad x_1=x_2=\frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Respuesta:

La ecuación tiene soluciones reales e iguales: $x = \dfrac{9}{4}$.

Conjunto solución de la ecuación: $S = \left\{\dfrac{9}{4}\right\}$.

3. Resolver cada ecuación:

(a) $3 - x^2 = 2x^2 - 24$ (b) $4x(x + 5) = 5(4x - 5)$

Solución:

(a) $3 - x^2 = 2x^2 - 24 \iff 3x^2 - 27 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3.$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x = \pm 3$.

(b) $4x(x + 5) = 5(4x - 5) \iff 4x^2 + 25 = 0 \iff 4x^2 = -25$. No tiene soluciones reales.

Respuesta: El conjunto solución de la ecuación es: $S = \emptyset$.

4. Resolver cada ecuación:

(a) $12x^2 = 27x$

(b) $\dfrac{4x^2 + 25x}{81} = 0$

(c) $3x(x - 5) = 7(x + 5)(x + 2) - 70$

Solución:

(a) $12x^2 = 27x \iff x(12x - 27) = 0 \iff x = 0 \lor x = 9/4$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x = 0, \quad x = 9/4$.

(b)
$$\frac{4x^2 + 25x}{81} = 0 \iff 4x^2 + 25x = 0 \iff x(4x + 25) = 0$$
$$\iff x = 0 \lor x = -25/4$$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x = 0, \quad x = -25/4$.

(c)
$$\begin{aligned} 3x(x - 5) = 7(x + 5)(x + 2) - 70 &\iff 3x^2 - 15x = 7x^2 + 49x \\ &\iff 4x^2 + 64x = 0 \\ &\iff x = 0 \lor x = -16 \end{aligned}$$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x = 0 \lor x = -16$

5. Resolver cada ecuación:

   (a) $(2x-31)(x+67)=0$

   (b) $x(x-2)=x+28$

   (c) $7x-9=1+3x^2$

   Solución:

   (a) $(2x-31)(x+67)=0 \iff 2x-31=0 \lor x+67=0$

   $$\iff x=31/2 \lor x=-67$$

   Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x=31/2 \lor x=-67$

   (b) $x(x-2)=x+28 \iff x^2-3x-28=0$

   Por Factorización:

   $$x^2-3x-28=0 \iff (x-7)(x+4)=0 \iff x=7 \lor x=-4$$

   Aplicando la fórmula:

   $$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(-28)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{3\pm 11}{2}.$$

   Luego, $x=7 \lor x=-4$.

   Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x=7,\ x=-4$.

   (c) $7x-9=1+3x^2 \iff 3x^2-7x+10=0.$

   $$\textit{Discriminante}=49-120<0$$

   la ecuación no tiene soluciones reales

   Respuesta: El conjunto solución de la ecuación es: $S=\emptyset$

6. Sin resolver cada ecuación, determinar la naturaleza de sus raíces.

   (a) $x^2=8x+12\sqrt{3}$

   (b) $4x(3-x)=9$

   (c) $3x^2=\sqrt{2}(x-\sqrt{3})$

   Solución:

Ecuación	Discriminante D	Respuesta
(a)	$D=64+48\sqrt{3}>0$	tiene sus dos raices reales y distintas
(b)	$D=144-144=0$	tiene sus dos raices reales e iguales
(c)	$D=2-12\sqrt{6}<0$	no tiene raices reales

7. Deducir la fórmula cuadrática que resuelve la ecuación $ax^2+bx+c=0$, mediante la **completación del cuadrado** de un binomio.

   Solución:

Ecuación cuadrática:	$ax^2+bx+c=0$
Multiplicar por $1/a$:	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
Sumar $-\frac{c}{a}$ a ambos lados:	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
Sumar a ambos lados $\frac{b^2}{4a^2}$	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$
Factorizar primer miembro:	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
Extraer raiz cuadrada:	$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Despejar x:	$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Luego:	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

   Las soluciones de la ecuación son:

   $$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

   Nota. Las soluciones son reales $\iff b^2-4ac\geq 0$.

8. Resolver la ecuación: $(3x-2)^2=(2x+5)^2$.

   Solución:

   $$\begin{aligned}(3x-2)^2=(2x+5)^2 &\iff 9x^2-12x+4=4x^2+20x+25\\ &\iff 5x^2-32x-21=0\\ &\iff x=7,\ o\ x=-3/5\end{aligned}$$

   Respuesta: La ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

   El conjunto solución de la ecuación es: $S=\{7,\ -3/5\}$.

9. Resolver la ecuación: $4x(x+1) = 5x^3$

Solución:

$$\begin{aligned} 4x(x+1) = 5x^3 \quad &\Longleftrightarrow \quad x(4x+4-5x^2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad 4x+4-5x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad 5x^2-4x-4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0, \ \vee \ x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x = 0,\ x = \dfrac{2+\sqrt{6}}{5},\ x = \dfrac{2-\sqrt{6}}{5}$.

10. Resolver la ecuación: $(2x)^2 + (2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 390$.

Solución:

$$\begin{aligned} &(2x)^2 + (2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 390 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 = 390 \\ &\Longleftrightarrow \quad 12x^2 + 16x - 380 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -19/3 \vee x = 5 \end{aligned}$$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x = -19/3,\ x = 5$.

11. Resolver cada ecuación:

(a) $\dfrac{3+5x}{1-x} = \dfrac{x+1}{1-2x} + 3$

(b) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{7}{x-2} - \dfrac{x}{x^2-3x+2}$

Solución: (a) $\dfrac{3+5x}{1-x} = \dfrac{x+1}{1-2x} + 3$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad (3+5x)(1-2x) = (x+1)(1-x) + 3(1-x)(1-2x) \\ &\Longleftrightarrow \quad 15x^2 - 8x + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 1/5 \vee x = 1/3 \end{aligned}$$

Respuesta: Luego de comprobar estas soluciones en la ecuación original, se obtiene que: las soluciones de la ecuación son: $x = 1/5, \quad x = 1/3$.

(b) $$\frac{x}{x-1} = \frac{7}{x-2} - \frac{x}{x^2-3x+2} \implies \frac{x}{x-1} = \frac{7}{x-2} - \frac{x}{(x-1)(x-2)}$$

$$\implies x(x-2) = 7(x-1) - x$$

$$\iff x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\iff x = 7 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Comprobación.

Para $x = 7$: $$\begin{cases} \dfrac{7}{7-1} = \dfrac{7}{6} \\ \dfrac{7}{7-2} - \dfrac{7}{(7-2)(7-1)} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{7}{30} = \dfrac{7}{6} \end{cases} \implies \text{x=7 es solución}$$

Para $x = 1$: $$\begin{cases} \dfrac{7}{1-1} \quad \text{no está definida} \end{cases} \implies \text{x=1 no es solución}$$

Respuesta: El conjunto solución de la ecuación es: $S = \{7\}$.

12. Determinar todos los x que satisfacen la ecuación:

$$\frac{3 + 6p - 2p^2 + xp}{3} = \frac{4p^2 + x}{x}, \quad \text{siendo } p \text{ constante } \neq 0$$

Solución:

$$\frac{3 + 6p - 2p^2 + xp}{3} = \frac{4p^2 + x}{x}$$
$$\implies x(3 + 6p - 2p^2 + xp) = 3(4p^2 + x)$$
$$\iff px^2 + (6p - 2p^2)x - 12p^2 = 0$$
$$\iff x^2 + (6 - 2p)x - 12p = 0$$
$$\iff x = \frac{-6 + 2p \pm 2|p+3|}{2}$$
$$\iff x = 2p \vee x = -6$$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son: $x = 2p$, $x = -6$.

13. Hallar el o los valores de $p \in \mathbb{R}$, una solución de la ecuación $(p^2+2)x^2-7x-2p=1$ sea $x=-1/2$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
x = -1/2 \quad & \text{es solución de } (p^2+2)x^2 - 7x - 2p = 1 \\
\iff \quad & (p^2+2)(-1/2)^2 - 7(-1/2) - 2p = 1 \\
\iff \quad & p^2 + 2 + 14 - 8p = 4 \\
\iff \quad & p^2 - 8p + 12 = 0 \\
\iff \quad & p = 2 \quad \text{o} \quad p = 6
\end{aligned}
$$

Respuesta: Existen dos valores de p, tal que $x=-1/2$ es una solución de la ecuación: $p=2$ o $p=6$.

14. Considerar la ecuación: $(3x-2m)^2+(6x-4m)(x+m)+(x+m)^2=0$, siendo m una constante real.

(a) Resolver la ecuación.

(b) Determinar el o los valores de $m \in \mathbb{R}$ tales que, $x=-2$ sea solución de la ecuación.

Solución:

(a) $(3x-2m)^2+(6x-4m)(x+m)+(x+m)^2=0$

$$\iff \quad 16x^2 - 8\,m\,x + m^2 = 0$$

$$\iff \quad x = \frac{8m \pm \sqrt{64m^2 - 64m^2}}{32}$$

$$\iff \quad x = \frac{m}{4}$$

Respuesta: Para cada $m \in \mathbb{R}$, la ecuación tiene las dos raíces reales e iguales (solución única): $x = \dfrac{m}{4}$.

(b) Nota: Se resolverá este problema, independiente de la parte (a) de este ejercicio.

$x=-2$ es solución de la ecuación dada $\iff$ al sustituir $x=-2$ en la ecuación original, se cumple la igualdad.

Así se obtiene la ecuación en m: $(-6-2m)^2+(-12-4m)(x+m)+(-2+m)^2=0$ equivalente a la ecuación: $m^2+16m+64=0$.

Resolviendo esta última ecuación se obtiene: $m=-8$.

Respuesta: $x=-2$ es solución de la ecuación, para $m=-8$.

15. Hallar el valor de la constante p en cada ecuación, de manera que satisfaga la condición que se indica. Comprobar.

(a) $2x^2 - px + 4 = 0$, la suma de sus raíces es 5.

(b) $(p+2)x^2 + 5x + 2p = 0$, el producto de sus raíces es $2/3$.

Solución:

(a) Suma de las raíces de la ecuación $2x^2 - px + 4 = 0$: $\dfrac{p}{2}$

Luego: $\dfrac{p}{2} = 5 \Longrightarrow p = 10$

Comprobación.

Soluciones de $2x^2 - 10x + 4 = 0$: $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Suma de sus raíces: $x_1 + x_2 = 5$

(b) Producto de las raíces de la ecuación $(p+2)x^2 + 5x + 2p = 0$ es: $\dfrac{2p}{p+2}$

Luego: $\dfrac{2p}{p+2} = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow p = 1$

Comprobación.

Soluciones de $3x^2 + 5x + 2 = 0$: $x_1 = -\dfrac{2}{3}$, $x_2 = -1$.

Producto de sus raíces: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{3}$

16. Hallar el (o los) valor(es) de la constante p, en cada caso, de manera que:

(a) La ecuación $(p+2)x^2 + 5x + 5p = 0$, tenga sus raíces iguales.

(b) La ecuación $x(x-3) = 2p$, tenga raíces reales.

Solución:

(a) Discriminante: $D = 25 - 4(p+2)(5p) = -20p^2 - 40p + 25$

$$\begin{aligned} \text{Las raices de la ecuación son iguales} &\iff -20p^2 - 40p + 25 = 0 \\ &\iff p = 1/2 \ \vee \ p = -5/2 \end{aligned}$$

Comprobación.

Para $p = 1/2$, las soluciones de $5x^2 + 10x + 5 = 0$ son: $x_1 = x_2 = -1$.

Para $p = -5/2$, las soluciones de $x^2 - 10x + 25 = 0$ son: $x_1 = x_2 = 5$.

Respuesta: La ecuación dada tiene sus raíces iguales, para $p = 1/2$, o para $p = -5/2$.

(b) $x(x-3) = 2p \iff x^2 - 3x - 2p = 0$

Discriminante: $D = 9 - 4(-2p) = 9 + 8p$

Respuesta:
$$\begin{aligned} \text{Las raices de la ecuación son reales} &\iff 9 + 8p \geq 0 \\ &\iff p \geq -9/8 \end{aligned}$$

17. Demostrar que para todo $p, q \in \mathbb{R}$, las raíces de la ecuación $x^2 + 2(p+q)x + 2pq = 0$ son números reales.

Demostración:

- Discriminante de la ecuación:

$$\begin{aligned} D &= (2(p+q))^2 - 8pq \\ &= 4(p^2 + 2pq + q^2) - 8pq \\ &= 4p^2 + 8pq + 4q^2 - 8pq \\ &= 4p^2 + 4q^2 \end{aligned}$$

- Análisis y conclusión:
  $D = 4p^2 + 4q^2 \geq 0$, para todo $p, q \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ las raices de la ecuación $x^2 + 2(p+q)x + 2pq = 0$ son números reales para todo $p, q \in \mathbb{R}$.