1. Factorizar completamente la expresión $x^2 - x - 6$

   Solución:

   Si se factoriza este trinomio en la siguiente forma

   $$x^2 - x - 6 = (x+a)(x+b)$$

   que es el producto de dos binomios, entonces debe determinarse los valores reales de a y b.

   Se tiene que

   $$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

   Igualando los coeficientes correspondiente, se tiene $a + b = -1$ y $ab = -6$. De donde $a = -3$ y $b = 2$. Luego

   $$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

   Observación: Del ejercicio precedente se puede sacar la siguiente *enseñanza*:

   > Para factorizar un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$, se deben buscar dos números α y β, tales que
   >
   > $$\alpha + \beta = b \quad \text{y} \quad \alpha \cdot \beta = c.$$
   >
   > En tal caso: $x^2 + bx + c = (x+\alpha)(x+\beta)$

2. Factorizar completamente la expresión $6x^2 + x - 15$

   Solución:

   En este caso se procede de una manera parecida al ejemplo precedente. Partimos buscando dos números tal que su producto sea igual a $-90 = 6 \cdot (-15)$ y su suma sea igual a 1 (coeficiente de x). En este caso tales números son: 10 y -9. Ahora se procede de la siguiente manera:

   $$\begin{aligned} 6x^2 + x - 15 &= 6x^2 + 10x - 9x - 15 \\ &= (6x^2 + 10x) - (9x + 15) \\ &= 2x(3x+5) - 3(3x+5) \\ &= (3x+5)(2x-3) \end{aligned}$$

3. Factorizar la expresión $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y - 4$

Solución:

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y - 4 &= (x+y)^2 - 3(x+y) - 4 \\ &= ((x+y)+1)((x+y)-4) \\ &= (x+y+1)(x+y-4) \end{aligned}$$

4. Factorizar la expresión $a^4 + 4a^2 + 16$.

Solución: Si en lugar de $4a^2$ el segundo término fuera $8a^2$, se tendría un cuadrado perfecto. De aquí, entonces surge la idea de sumar (y restar) $4a^2$. De este modo la expresión resultante será factorizable. En efecto:

$$\begin{aligned} a^4 + 4a^2 + 16 &= a^4 + 4a^2 + 4a^2 - 4a^2 + 16 \\ &= a^4 + 4a^2 + 4a^2 - 4a^2 + 16 \\ &= (a^4 + 8a^2 + 16) - 4a^2 \\ &= (a^2+4)^2 - (2a)^2 \\ &= ((a^2+4) - 2a)((a^2+4) + 2a) \\ &= (a^2 + 4 - 2a)(a^2 + 4 + 2a) \end{aligned}$$

5. Factorizar las siguientes sumas/restas de cubos:

(a) $A = 8x^3 + 27y^3$

(b) $B = (5x+3)^3 + (x-5)^3$

(c) $C = (3x-2)^3 - 125x^3$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned} A &= (2x)^3 + (3y)^3 \\ &= (2x+3y)((2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2) \\ &= (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} B &= ((5x+3)+(x-5))((5x+3)^2-(5x+3)(x-5)+(x-5)^2) \\ &= (6x-2)(25x^2+30x+9-(5x^2-22x-15)+x^2-10x+25) \\ &= (6x-2)(25x^2+30x+9-5x^2+22x+15+x^2-10x+25) \\ &= 2(x-1)(21x^2+42x+49) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} C &= (3x-2)^3-(5x)^3 \\ &= ((3x-2)-(5x))((3x-2)^2+5x(3x-2)+(5x)^2) \\ &= (-2x-2)(9x^2-12x+4+15x^2-10x+25x^2) \\ &= -2(x+1)(49x^2-22x+4) \end{aligned}$$

6. La expresión algebraica $A = a+b-a^3+ab^2+a^2b-b^3$ se puede factorizar en 3 factores. Determinar la suma de dichos factores.

Solución: En primer lugar factoricemos la expresión A:

$$\begin{aligned} A &= (a+b)+(ab^2+a^2b)-(a^3+b^3) \\ &= (a+b)+ab(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ &= (a+b)(1+ab-(a^2-ab+b^2)) \\ &= (a+b)(1+ab-a^2+ab-b^2)) \\ &= (a+b)(1+2ab-a^2-b^2)) \\ &= (a+b)(1-(a^2-2ab+b^2)) \\ &= (a+b)(1-(a+b)^2) \\ &= (a+b)(1-(a+b))(1+(a+b)) \\ &= (a+b)(1-a-b)(1+a+b) \end{aligned}$$

Luego, los 3 factores de la expresión A son: $a+b$, $1-a-b$ y $1+a+b$. Por lo tanto, la suma de los factores de A es:

$$(a+b)+(1-a-b)+(1+a+b) = 2+a+b$$

7. Si $x^2 \neq 1$ y $b \neq 1$, comprobar que la expresión $E = \dfrac{1-b^2}{(1+bx)^2-(b+x)^2}$ es independiente de b.

   Solución:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{(1-b)(1+b)}{(1+bx+b+x)(1+bx-(b+x))} \\
&= \frac{(1-b)(1+b)}{(1+bx+b+x)(1+bx-b-x)} \\
&= \frac{(1-b)(1+b)}{(1+b+x(1+b))(1-b-x(1-b))} \\
&= \frac{(1-b)(1+b)}{((1+b)(1+x))((1-b)(1-x))} \\
&= \frac{1}{(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

   como en el resultado obtenido *no aparece* b, se ha verificado que la expresión E es independiente de b.

8. Simplificar $A = \dfrac{y}{x^2} \div \left(\dfrac{x^2+3x}{2x^2+5x-3} \div \dfrac{x^3y-x^2y}{2x^2-3x+1}\right)$

   Solución:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{y}{x^2} \div \left(\frac{x(x+3)}{(2x-1)(x+3)} \div \frac{x^2y(x-1)}{(2x-1)(x-1)}\right) \qquad x \neq -3\,,\ x \neq 1 \\
&= \frac{y}{x^2} \div \left(\frac{x}{2x-1} \div \frac{x^2y}{2x-1}\right) \qquad x \neq \frac{1}{2}\,,\ x \neq 0\,,\ y \neq 0 \\
&= \frac{y}{x^2} \div \left(\frac{x}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2y}\right) \\
&= \frac{y}{x^2} \div \left(\frac{1}{xy}\right) \qquad x \neq 0 \\
&= \frac{y^2}{x}, \qquad x \neq 0 \quad y \neq 0
\end{aligned}
$$

Conclusión:

$$
\frac{y}{x^2} \div \left(\frac{x^2+3x}{2x^2+5x-3} \div \frac{x^3y-x^2y}{2x^2-3x+1}\right) = \frac{y^2}{x} \qquad \forall x, x \neq 0, \frac{1}{2}, 1, -3 \quad \forall y, y \neq 0
$$

9. Simplificar la expresión: $\dfrac{x^2 - x - 6}{(x-3)\sqrt{x^2 - 10x + 25}}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - x - 6}{(x-3)\sqrt{x^2 - 10x + 25}} &= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)\sqrt{x^2 - 10x + 25}} \\
&= \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}} \qquad \text{con}\, x \neq 3 \\
&= \frac{x+2}{\sqrt{(x-5)^2}} = \frac{x+2}{x-5} \qquad \text{para}\, x > 5
\end{aligned}$$

10. Simplificar la expresión: $\dfrac{2}{x^2 + 2x + 1} - \dfrac{1}{x^2 + 4x + 3} + \dfrac{3}{x^2 - x - 2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{3}{x^2 - x - 2} &= \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x-2)(x+1)} \\
&= \frac{2(x-2)(x+3) - (x+1)(x-2) + 3(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{2(x^2 + x - 6) - (x^2 - x - 2) + 3(x^2 + 4x + 3)}{(x+1)^2(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{2x^2 + 2x - 12 - x^2 + x + 2 + 3x^2 + 12x + 9}{(x+1)^2(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{4x^2 + 15x - 1}{(x+1)^2(x-2)(x+3)}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{2}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{3}{x^2 - x - 2} = \frac{4x^2 + 15x - 1}{(x+1)^2(x-2)(x+3)}$$