1. Resolver cada ecuación, presentando su conjunto solución:

   (a) $\dfrac{1}{x-1}+3=\dfrac{8}{x}$ (b) $\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{x+1}{5}$

   Solución:

   (a) $\dfrac{1}{x-1}+3=\dfrac{8}{x} \implies x+3x(x-1)=8(x-1) \implies x=4/3 \ \vee \ x=2.$

   Comprobación:

   $x=4/3$: $\dfrac{1}{4/3-1}+3=3+3=6$ y $\dfrac{8}{4/3}=6$

   $\implies x=4/3$ es solución

   $x=2$: $\dfrac{1}{2-1}+3=1+3=4$ y $\dfrac{8}{2}=4$

   $\implies x=2$ es solución

   Luego, $S=\{4/3,\ 2\}$

   (b) $\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{x+1}{5} \implies 5=(2x-1)(x+1) \implies x=3/2 \ \vee \ x=-2.$

   Comprobación:

   $x=3/2$: $\dfrac{1}{2(3/2)-1}=\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{(3/2)+1}{5}=\dfrac{1}{2}$

   $\implies x=3/2$ es solución

   $x=-2$: $\dfrac{1}{2(-2)-1}=-\dfrac{1}{5}$ y $\dfrac{(-2)+1}{5}=-\dfrac{1}{5}$

   $\implies x=-2$ es solución

   Luego, $S=\{3/2,\ -2\}$

2. Resolver la ecuación: $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{3}$

   Solución:

   $$\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x}=\frac{1}{3} \implies \frac{x-2(x-2)}{(x-2)x}=\frac{1}{3}$$

   $$\implies \frac{4-x}{(x-2)x}=\frac{1}{3}$$

   multiplicar por $3x(x-2)$

   $$\implies 12-3x=x^2-2x$$

   resolviendo esta ecuación se obtiene

   $$\implies x=-4 \ \vee \ x=3$$

   Comprobando en la ecuación original, resulta que ambas son soluciones. Luego, $S=\{-4,\ 3\}$

3. Resolver las ecuaciones:

(a) $\dfrac{x}{x-2} = x$ (b) $\dfrac{x-2}{x} = x$ (c) $\dfrac{x^2+2x}{x-2} + \dfrac{7}{4-2x} = \dfrac{1}{2}$

Solución:

(a)
$$\frac{x}{x-2} = x \implies x = x(x-2)$$
$$\implies x(x-3) = 0$$
$$\implies x = 0 \ \vee \ x = 3$$

Comprobación:

$x = 0$: $\dfrac{0}{0-2} = 0 \implies x = 0$ es solución

$x = 3$: $\dfrac{3}{3-2} = 3 \implies x = 3$ es solución

Por lo tanto: $S = \{0, 3\}$

(b)
$$\frac{x-2}{x} = x \implies x^2 = x - 2$$
$$\implies x^2 - x + 2 = 0$$

$D = 1 - 8 < 0 \implies$ la ecuación no tiene soluciones reales

Por lo tanto: $S = \emptyset$

(c)
$$\frac{x^2+2x}{x-2} + \frac{7}{4-2x} = \frac{1}{2} \implies \frac{x^2+2x}{x-2} - \frac{7}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$
$$\implies \frac{2x^2+4x-7}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$
$$\implies 2x^2 + 4x - 7 = x - 2$$
$$\implies 2x^2 + 3x - 5 = 0$$
$$\implies x = 1 \ \vee \ x = -5/2$$

Comprobación:

$x = 1$: $\dfrac{1^2+2}{1-2} + \dfrac{7}{4-2} = \dfrac{3}{-1} + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\implies x = 1$ es solución

$x = -5/2$: $\dfrac{(-5/2)^2 + 2(-5/2)}{-5/2-2} + \dfrac{7}{4-2(-5/2)} = \dfrac{1}{2}$

$\implies$ p $x = -5/2$ es solución

Por lo tanto: $S = \{1, -5/2\}$

4. Resolver la ecuación: $\dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{3x-5}{x-4} = \dfrac{12}{x^2-2x-8}$

Solución:

$$\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{x^2-2x-8} \Longrightarrow \frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{(x+2)(x-4)}$$

multiplicar por $(x+2)(x-4)$

$$\Longrightarrow (3x+4)(x-4) - (3x-5)(x+2) = 12$$

resolviendo esta ecuación se obtiene

$$\Longrightarrow x = -2$$

Comprobación:

$x = -2$: $\dfrac{3x(-2)+4}{-2+2} - \dfrac{3(-2)-5}{(-2)-4}$ no está definida

Luego, $S = \emptyset$

5. Determinar el o los valores de $a \in \mathbb{R}$, tal que $x = 2$ sea solución de la ecuación:

$$\frac{3}{1 - \dfrac{1}{a - \dfrac{1}{x-a}}} = 4$$

Solución:

$$\frac{3}{1 - \dfrac{1}{a - \dfrac{1}{x-a}}} = 4 \Longrightarrow \frac{3}{1 - \dfrac{1}{a - \dfrac{1}{2-a}}} = 4 \qquad \text{sustituyendo } x = 2$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{1 - \dfrac{2-a}{a(2-a)-1}} = 4$$

$$\Longrightarrow \frac{3(2a-a^2-1)}{2a-a^2-1-(2-a)} = 4$$

$$\Longrightarrow \frac{3(2a-a^2-1)}{3a-a^2-3} = 4$$

$$\Longrightarrow 6a - 3a^2 - 3 = 12a - 4a^2 - 12$$

$$\Longrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$\Longrightarrow a = 3$$

Sustituyendo $a = 3$, $x = 2$ en la ecuación original, se obtiene una igualdad.

6. Resolver cada ecuación:

   (a) $\sqrt{3x+1}=4$ (b) $\sqrt{7+2x}=2x+1$

   Solución:

   (a) $\sqrt{3x+1}=4$ elevar al cuadrado $()^2$
   $3x+1=16$ resolver la ecuación lineal
   $x=5$

   Comprobación:
   $x=5$: $\sqrt{3\cdot 5+1}=\sqrt{16}=4 \Longrightarrow x=5$ es solución

   Por lo tanto: $S=\{5\}$

   (b) $\sqrt{7+2x}=2x+1$ elevar al cuadrado
   $7+2x=(2x+1)^2$
   $4x^2+2x-6=0$ resolver la ecuación cuadrática
   $x=-3/2 \quad \vee \quad x=1$

   Comprobación:
   $x=-3/2$: $\sqrt{7+2(-3/2)}=\sqrt{4}=2$
   $2(-3/2)+1=-2 \Longrightarrow x=-3/2$ no es solución

   $x=1$: $\sqrt{7+2(1)}=\sqrt{9}=3$
   $2(1)+1=3 \Longrightarrow x=1$ es solución

   Por lo tanto: $S=\{1\}$

7. Resolver cada ecuación:

   (a) $\sqrt{x-2}=x-2$ (b) $\sqrt{(x-2)^2}=3$ (c) $\sqrt{(x-2)^2}=x$

   Solución:

   (a) $\sqrt{x-2}=x-2 \quad \Longrightarrow x-2=(x-2)^2$
   $\Longrightarrow (x-2)(x-2-1)=0$
   $\Longrightarrow \quad x=2 \vee x=3$

   Comprobando en la ecuación original, se obtiene que, ambas son soluciones.
   Por lo tanto, $S=\{2,\,3\}$

   (b) $\sqrt{(x-2)^2}=3 \quad \Longrightarrow |x-2|=3$
   $\Longrightarrow \quad x-2=3 \quad \vee -(x-2)=3$
   $\Longrightarrow \quad x=5 \vee x=-1$

   Comprobando en la ecuación original, se obtiene que, ambas son soluciones.
   Por lo tanto, $S=\{-1,\,5\}$

(c) $\sqrt{(x-2)^2} = x \implies |x-2| = x$
$\implies x - 2 = x \quad \vee -(x-2) = x$
$\implies -2 = 0 \vee x = 1$
$\implies S_1 = \emptyset \vee S_2 = \{x = 1\}$

Comprobando en la ecuación original, se obtiene que, $x = 1$ es solución.
Por lo tanto, $S = \{1\}$

8. Resolver las ecuaciones:

   (a) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$

   (b) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{2x-3} = 2$

Solución:

(a)
$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} &= 1 && \text{sumar } \sqrt{x} \\ \sqrt{2x+1} &= \sqrt{x} + 1 && \text{elevar al cuadrado } ()^2 \\ 2x+1 &= x + 2\sqrt{x} + 1 && \text{despejar } 2\sqrt{x} \\ 2\sqrt{x} &= x && \text{elevar al cuadrado } ()^2 \\ 4x &= x^2 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x = 4 \end{aligned}$$

Comprobación:

$x = 0$: $\sqrt{2 \cdot 0 + 1} - \sqrt{0} = 1 \implies x = 0$ es solución

$x = 4$: $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1 \implies x = 4$ es solución

Por lo tanto: $S = \{0, 4\}$

(b)
$$\begin{aligned} \sqrt{4x+1} - \sqrt{2x-3} &= 2 && \text{sumar } \sqrt{2x-3} \\ \sqrt{4x+1} &= \sqrt{2x-3} + 2 && \text{elevar al cuadrado } ()^2 \\ 4x+1 &= 2x - 3 + 4\sqrt{2x-3} + 4 && \text{despejar } 4\sqrt{3x-3} \\ 4\sqrt{2x-3} &= 2x && \text{elevar al cuadrado } ()^2 \\ 16(2x-3) &= 4x^2 \\ x = 6 \quad &\vee \quad x = 2 \end{aligned}$$

Comprobación:

$x = 6$: $\sqrt{4 \cdot 6 + 1} - \sqrt{2 \cdot 6 - 3} = 2 \implies x = 6$ es solución

$x = 2$: $\sqrt{4 \cdot 2 + 1} - \sqrt{2 \cdot 2 - 3} = 2 \implies x = 2$ es solución

Por lo tanto: $S = \{2, 6\}$

9. Resolver la ecuación: $\sqrt{2\sqrt{x+16}-3\sqrt{x}}=1$

Solución:

$$\begin{array}{rll}
\sqrt{2\sqrt{x+16}-3\sqrt{x}} & =1 & \text{elevar al cuadrado } ()^2 \\
\sqrt{2\sqrt{x+16}-3\sqrt{x}} & =1 & \text{sumar } 3\sqrt{x} \\
2\sqrt{x+16} & =3\sqrt{x}+1 & \text{elevar al cuadrado } ()^2 \\
4(x+16) & =9x+6\sqrt{x}+1 & \\
63-5x & =6\sqrt{x} & \text{elevar al cuadrado } ()^2 \\
36x & =(63-5x)^2 & \\
x=9 & \vee\, x=\dfrac{441}{25} &
\end{array}$$

Comprobación:

$x=9$:

$\sqrt{2\sqrt{9+16}-3\sqrt{9}}=1 \Longrightarrow x=9$ es solución

$x=\dfrac{441}{25}$:

$\sqrt{2\sqrt{441/25}-3\sqrt{441/25}}=\sqrt{2\cdot 21/5-3\cdot 21/5}$ no es un número real

$\Longrightarrow x=\dfrac{441}{25}$ no es solución

Por lo tanto: $S=\{9\}$

10. Resolver la ecuación: $\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{9}{x^3}+8=0$

Solución:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{9}{x^3}+8 & =0 & \text{sustituir } \dfrac{1}{x^3}=u \\
u^2+9u+8 & =0 & \text{resolver la ecuación} \\
u=-8 & \vee \quad u=-1 &
\end{array}$$

Para $u=-8$: $\dfrac{1}{x^3}=-8 \Longrightarrow x=-1/2$

Comprobación: $\dfrac{1}{(-1/2)^6}+\dfrac{9}{(-1/2)^3}+8=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-1/2$ es solución

Para $u=-1$: $\dfrac{1}{x^3}=-1 \quad \Longrightarrow \quad x=-1$

Comprobación: $\dfrac{1}{(-1)^6}+\dfrac{9}{(-1)^3}+8=0 \quad \Longrightarrow \quad x=1$ es solución

Luego, $S=\{-1/2,\,-1\}$

11. Resolver la ecuación: $5\left(\frac{1+x}{x^2}\right) - 16\left(\frac{x^2}{1+x}\right) - 2 = 0$

Solución:

$$\begin{aligned}
5\left(\frac{1+x}{x^2}\right) - 16\left(\frac{x^2}{1+x}\right) - 2 &= 0 && \text{sustituir } \frac{1+x}{x^2} = u \\
5u - \frac{16}{u} - 2 &= 0 && \text{multiplicar por } u \\
5u^2 - 16 - 2u &= 0 && \text{resolver la ecuación para } u \\
u = 2 \quad &\vee \quad u = -8/5
\end{aligned}$$

Para $u = 2$: $\frac{1+x}{x^2} = 2 \Longrightarrow \quad 2x^2 - x - 1 = 0$
$x = 1 \vee x = -1/2$

Para $u = -8/5$: $\frac{1+x}{x^2} = -8/5 \Longrightarrow \quad 8x^2 + 5x + 5 = 0$
NO tiene soluciones reales

Comprobación: $x = 1,\ x = -1/2$ resuelven la ecuación

Luego, $S = \{-1/2,\ 1\}$

12. Resolver la ecuación: $x^2 - 6x - \sqrt{x^2 - 6x - 3} = 5$

Solución:

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x - \sqrt{x^2 - 6x - 3} &= 5 && \text{despejar } \sqrt{x^2 - 6x - 3} \\
\sqrt{x^2 - 6x - 3} &= x^2 - 6x - 5 && \text{elevar al cuadrado } ()^2 \\
x^2 - 6x - 3 &= (x^2 - 6x - 5)^2 && \text{sustituir } x^2 - 6x = u \\
u - 3 &= (u-5)^2 \\
u - 3 &= u^2 - 10u + 25 && \text{resolver la ecuación} \\
u = 7 \quad &\vee \quad u = 4
\end{aligned}$$

Para $u = 7$: $x^2 - 6x = 7 \Longrightarrow \quad x = 7,\ x = -1$
Comprobación: ambas son soluciones de la ecuación original

Para $u = 4$: $x^2 - 6x = 4 \Longrightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{13}$
Comprobación: éstas no son soluciones de la ecuación original

Luego, $S = \{-1,\ 7\}$