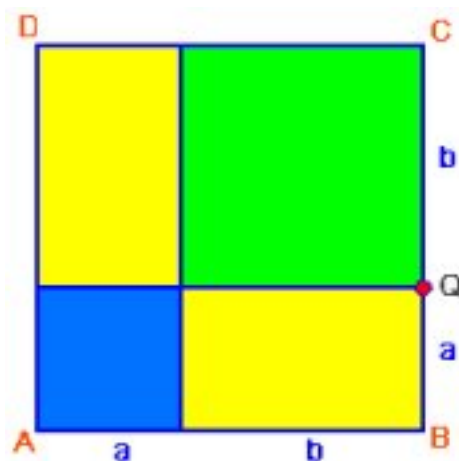


1. Comprobar geométicamente la fórmula del cuadrado de un binomio.

Solución: Consideremos el siguiente cuadrado ABCD, cuyos lados se han dividido en dos partes de longitudes a y b :



Es claro que, como el lado del cuadrado ABCD mide $a + b$ su área es $(a + b)^2$.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \text{Área del cuadrado ABCD} &= \text{área cuadrado azul} \\ &+ \text{áreas rectángulos amarillos} \\ &+ \text{área cuadrado verde} \end{aligned}$$

luego:

$$\text{Área del cuadrado ABCD} = a^2 + 2ab + b^2$$

Por lo tanto:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Desarrollar $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$.

Solución:

$$\begin{aligned} (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) &= (x^4 + 1)((x^2)^2 - 1) \\ &= (x^4 + 1)(x^4 - 1) \\ &= (x^4)^2 - 1 \\ &= x^8 - 1 \end{aligned}$$

3. Desarrollar $(3a - 2b^2)^3$.

Solución:

$$\begin{aligned}(3a - 2b^2)^3 &= (3a)^3 + 3 \cdot 3a \cdot (2b^2)^2 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 2b^2 - (2b^2)^3 \\ &= 27a^3 + 3 \cdot 3a \cdot 4b^4 - 3 \cdot 9a^2 \cdot 2b^2 - 8b^6 \\ &= 27a^3 + 36ab^4 - 54a^2b^2 - 8b^6\end{aligned}$$

4. Desarrollar $(x - y + z)(x + y + z)$

Solución:

$$\begin{aligned}(x - y + z)(x + y + z) &= ((x + z) - y)((x + z) + y) \\ &= (x + z)^2 - y^2 \\ &= x^2 + 2xz + z^2 - y^2\end{aligned}$$

5. Simplificar la expresión $A = (x^a + y^b)(x^a - y^b)(x^{2a} + y^{2b}) - (x^{2a} - y^{2b})^2$

Solución:

$$\begin{aligned}A &= ((x^a)^2 - (y^b)^2)(x^{2a} + y^{2b}) - (x^{2a} - y^{2b})^2 \\ &= (x^{2a} - y^{2b})(x^{2a} + y^{2b}) - (x^{2a} - y^{2b})^2 \\ &= ((x^{2a})^2 - (y^{2b})^2) - (x^{2a} - y^{2b})^2 \\ &= (x^{4a} - y^{4b}) - (x^{2a} - y^{2b})^2 \\ &= (x^{4a} - y^{4b}) - ((x^{2a})^2 - 2x^{2a}y^{2b} + (y^{2b})^2) \\ &= (x^{4a} - y^{4b}) - (x^{4a} - 2x^{2a}y^{2b} + y^{4b}) \\ &= x^{4a} - y^{4b} - x^{4a} + 2x^{2a}y^{2b} - y^{4b} \\ &= 2x^{2a}y^{2b} - 2y^{4b}\end{aligned}$$

6. Sabiendo que $x + y = 6$ y que $xy = 5$, calcular el valor de $x^3 + y^3$.

Solución: Recordando el cubo de un binomio se tiene:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$$

es decir:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$$

sustituyendo $x + y = 6$ y $xy = 5$, se tiene:

$$6^3 = x^3 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + y^3 \Rightarrow x^3 + y^3 = 216 - 90 = 126$$

Por lo tanto, $x^3 + y^3 = 126$.

7. Verificar que si $(x + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$, entonces $x = y$.

Solución:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= 2(x^2 + y^2) \Rightarrow \\ x^2 + 2xy + y^2 &= 2x^2 + 2y^2 \Rightarrow \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 0 \Rightarrow \\ (x - y)^2 &= 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

8. Buscando una ley de formación:

- (a) Desarrollar $(a + b)^1$, $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ y $(a + b)^4$
- (b) Realizar una tabla con los coeficientes numéricos de los términos obtenidos en cada desarrollo.
- (c) Observar la forma que toman los términos en los desarrollos obtenidos, sin considerar sus coeficientes numéricos.
- (d) Proponer el desarrollo para $(a + b)^5$.

Solución:

- (a) El desarrollo de las 3 primera expresiones ya son conocidas. Busquemos entonces el desarrollo de $(a + b)^4$:

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= (a + b)^2(a + b)^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} (a + b)^1 &= a + b \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

- (b) Ordenemos la información solicitada en la siguiente tabla:

n						
1			1		1	
2			1		2	
3		1		3		3
4	1		4		6	

Observación: Cada término de la tabla precedente, si está en el borde vale 1 y si no está en el borde se obtiene sumando los dos términos *sobre él*.

- (c) Los términos son todos de la forma $a^i b^j$, donde i parte de n y baja, de 1 en 1, hasta 0. Por su parte j parte de 0 y sube, de 1 en 1 hasta n . En cada término la suma de los exponentes es igual a n .
- (d) Observando la ley que siguen los términos, se deduce que

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$