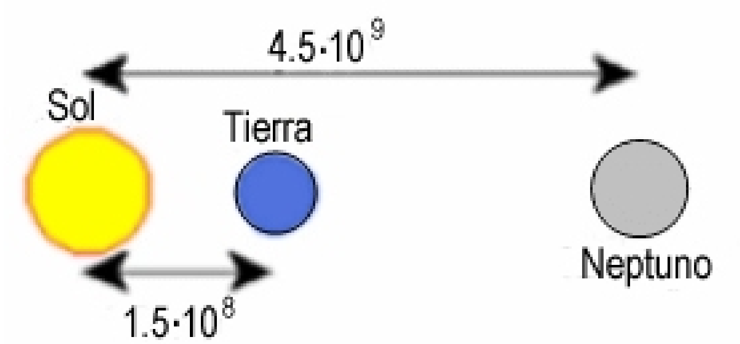
En esta sección se revisará de manera global el tema de potencias con exponentes enteros y racionales, sus propiedades en relación con las operaciones de multiplicación, división y elevar a una nueva potencia.



Una expresión de la forma a^m es llamada la *potencia* m de a, donde a es un número real llamado *base* y m es un número racional llamado *exponente*.

Potencia para exponente entero

Definición. Sea a un número real y sea n un número entero.

- Para n **entero positivo**, a^n está definida para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a \qquad (n\ factores)$$

- Para $n = 0$, a^0 está definida para todo $a \neq 0$:

$$a^0 = 1$$

- Para n **entero negativo**, a^n está definida para todo $a \neq 0$:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Ejemplos

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \qquad (3201,98)^0 = 1, \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Nota. Sea $a \in \mathbb{R}$, y sea $n \in \mathbb{Z}$.

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot a \dots a \ \ (n\ veces) & \text{para } n > 0 \\ 1 & \text{para } n = 0, \text{ y } a \neq 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{para } n < 0 \text{ y } a \neq 0 \end{cases}$$

Propiedades.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $m, n \in \mathbb{Z}$. A continuación se presentan las principales propiedades de *potencias*, junto a sus *restricciones*, y un ejemplo de uso de cada regla.

	Propiedad	**Restricción(es)**	**Ejemplo(s)**
(1)	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a \neq 0$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$ $3^{-3} \cdot 3^7 = 3^{-3+7} = 3^4$
(2)	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a \neq 0$	$\dfrac{2^{15}}{2^{11}} = 2^4$ $\dfrac{3^5}{3^{-2}} = 3^{5-(-2)} = 3^7$
(3)	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a \neq 0$	$(2^3)^4 = 2^{12}$ $(5^{-3})^2 = 5^{-3 \cdot 2} = 5^{-6}$
(4)	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$a,\ b \neq 0$	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 512$
(5)	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$a,\ b \neq 0$	$\left(\dfrac{6}{7}\right)^2 = \dfrac{6^2}{7^2} = \dfrac{36}{49}$
(6)	$a^0 = 1$	$a \neq 0$	$3^0 = 1$
(7)	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a \neq 0$	$3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
(8)	$\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$	$a \neq 0$	$\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$

Raíz n-ésima

Definición. Sea n un entero positivo mayor que 1, y sean a y b números reales.

$$a \text{ es una } \textbf{raíz n-ésima} \text{ de } b \iff a^n = b$$

Ejemplos

- Ya que $3^2 = 9$, luego 3 es una raíz cuadrada de 9. Como $(-3)^2 = 9$, luego -3 tambin es una raz cuadrada de 9.
- Como $(-5)^3 = -125$, luego -5 es una raíz cúbica de -125.

Raíz n-ésima principal

Definición. Sea b un número real y n un número natural.
La *raíz n-ésima* principal de b (o simplemente, *raíz n-ésima* de b), si es que existe, es el único número real a del mismo signo que b tal que $a^n = b$. Se denota $\sqrt[n]{b}$.

Observaciones.

1. Si n es par, entonces, $\sqrt[n]{b}$ representa un número real, si y sólo si, $b \geq 0$.

   Si n es impar, entonces, $\sqrt[n]{b}$ representa un número real, para todo $b \in \mathbb{R}$.

   Si b es negativo y n es par, entonces $\sqrt[n]{b}$, no representa un número real.

2. Para todo $b \in \mathbb{R}$ se tiene que: $\boxed{\sqrt{b^2} = |b|}$.

3. Para todo $b \in \mathbb{R}$ se tiene que: $\sqrt[3]{b^3} = b$.

Ejemplos.

- $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, $\sqrt{-4}$ no es un número real, $\sqrt[3]{-8} = -2$

Relación entre potencias de exponente fraccionario y raíces

Definición. Sean p y q enteros, siendo $q > 0$. Si $b > 0$, o bien, $b < 0$ y q es impar, se define:

$$b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}$$

Ejemplos

- $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$, $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$

Propiedades de las potencias y raíces

Las propiedades de potencias con exponentes enteros, se cumplen para exponentes racionales, a excepción de la propiedad (3). A continuación se presenta un conjunto de propiedades de *potencias y raíces*, junto a sus *restricciones*, y un ejemplo de uso de cada regla.

Los números m y n son números enteros, a y b son números reales.

	Propiedad	**Restricción(es)**	**Ejemplos**
(9)	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a > 0$, o $a < 0$ y n impar	$49^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{49}$
(10)	$a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$	$a > 0$, o $a < 0$ y n impar	$35^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{35^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{35}}$
(11)	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$a > 0$ y $b > 0$, o $a < 0$ o $b < 0$, n impar	$\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{32} = 2$
(12)	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$a > 0$ y $b > 0$, o $a < 0$ o $b < 0$, n impar	$\dfrac{\sqrt[3]{28}}{\sqrt[3]{14}} = \sqrt[3]{\dfrac{28}{14}} = \sqrt[3]{2}$
(13)	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$a > 0$, o $a < 0$, m y n impar	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$
(14)	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$a > 0$, o $a < 0$ y n impar	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$
(15)	$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$	$a > 0$, o $a < 0$ y n impar	$(-4)^{\frac{2}{3}} = ((-4)^2)^{\frac{1}{3}}$ $= 16^{\frac{1}{3}}$