

1. Calcular: $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + 90 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot (-3)^{-2}$

Solución:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + 90 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot (-3)^{-2} &= \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^{-1} + 90 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot ((-3)^2)^{-1} \\ &= \left(-\frac{1}{27}\right)^{-1} + 30 - 3 \cdot 9^{-1} = -27 + 30 - 3 \cdot \frac{1}{9} \\ &= 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

2. Simplificar cada expresión, y escribir el resultado de manera que contenga sólo exponentes positivos.

(a) $(3a^{-5})^2(-2a^{12})^3$

(b) $(3a^2b)^{-1} \left(-\frac{1}{3}a^{-3}b^5\right)^{-3}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (3a^{-5})^2(-2a^{12})^3 &= (3^2a^{-10})((-2)^3a^{36}) \\ &= (9 \cdot (-8)) \cdot (a^{-10} \cdot a^{36}) = -72a^{-10+36} \\ &= -72a^{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (3a^2b)^{-1} \left(-\frac{1}{3}a^{-3}b^5\right)^{-3} &= 3^{-1}a^{-2}b^{-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} a^9b^{-15} \\ &= 3^{-1}a^{-2}b^{-1}(-1)^3 3^3a^9b^{-15} \\ &= -3^{-1+3}a^{-2+9}b^{-1-15} = -3^2a^7b^{-16} \\ &= -\frac{9a^7}{b^{16}} \end{aligned}$$

3. Simplificar y expresar su valor mediante potencias con exponentes positivos.

(a) $100^2 \cdot 0.001^5 \cdot 1000^3$

(b) $100^{5/2} \cdot 20^{-7}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 100^2 \cdot 0.001^5 \cdot 1000^3 &= 10^4 \cdot (10^{-3})^5 \cdot 10^9 = 10^4 \cdot 10^{-15} \cdot 10^9 \\ &= 10^{4-15+9} = 10^{-2} = \frac{1}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad 100^{5/2} \cdot 20^{-7} &= (10^2)^{5/2} \cdot (2 \cdot 10)^{-7} = 10^5 \cdot 2^{-7} \cdot 10^{-7} = 10^{5-7} \cdot 2^{-7} \\
 &= 10^{-2} \cdot 2^{-7} = \frac{1}{10^2 \cdot 2^7} \\
 &= \frac{1}{2^9 \cdot 5^2}
 \end{aligned}$$

4. Simplificar cada expresión y escribir su valor usando potencias con exponentes positivos.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \left(\frac{81}{20}\right)^{-3} : \left(\frac{25}{24}\right)^2 & \qquad \text{(b)} \quad \frac{3 \cdot 0,25 \cdot 4 \cdot (0,5)^{-3}}{5 \cdot 2^{-6} \cdot 8} \div \frac{0,5}{4}
 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \left(\frac{81}{20}\right)^{-3} : \left(\frac{25}{24}\right)^2 &= \left(\frac{3^4}{2^2 \cdot 5}\right)^{-3} : \left(\frac{5^2}{2^3 \cdot 3}\right)^2 = \left(\frac{3^{-12}}{2^{-6} \cdot 5^{-3}}\right) \cdot \left(\frac{2^6 \cdot 3^2}{5^4}\right) \\
 &= 3^{-12+2} \cdot 2^{6+6} \cdot 5^{3-4} = 3^{-10} \cdot 2^{12} \cdot 5^{-1} \\
 &= \frac{2^{12}}{3^{10} \cdot 5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \frac{3 \cdot 0,25 \cdot 4 \cdot (0,5)^{-3}}{5 \cdot 2^{-6} \cdot 8} \div \frac{0,5}{4} &= \frac{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{5 \cdot 2^{-6} \cdot 2^3} \div \frac{1}{2^2} \\
 &= \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3}{5 \cdot 2^{-6} \cdot 2^3} \div \frac{2^{-1}}{2^2} \\
 &= \frac{3 \cdot 2^{-2} \cdot 2^2 \cdot 2^3}{5 \cdot 2^{-6} \cdot 2^3} \cdot \frac{2^2}{2^{-1}} \\
 &= \frac{3 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^6}{5 \cdot 2^2 \cdot 2^3} \cdot 2^2 \cdot 2^1 = \frac{3 \cdot 2^{2+3+6+2+1-2-3}}{5} \\
 &= \frac{3 \cdot 2^9}{5}
 \end{aligned}$$

5. Simplificar cada expresión y escribir el resultado de manera que contenga sólo exponentes positivos.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \left((8a^6)^{-3} \cdot \frac{6}{a^{-2}}\right)^{-1} & \qquad \text{(b)} \quad \frac{-a^2 \cdot (-2a)^4}{(-2a)^3 \cdot (-a)^{-1}}
 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \left((8a^6)^{-3} \cdot \frac{6}{a^{-2}} \right)^{-1} &= (8^{-3} a^{-18} \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^2)^{-1} = (2^{-9+1} 3 \cdot a^{-18+2})^{-1} \\
 &= (2^{-8} 3 \cdot a^{-16})^{-1} = \left(\frac{3}{2^8 a^{16}} \right)^{-1} \\
 &= \frac{2^8 a^{16}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \frac{-a^2 \cdot (-2a)^4}{(-2a)^3 \cdot (-a)^{-1}} &= \frac{(-1) \cdot a^2 \cdot (-2)^4 \cdot a^4}{(-2)^3 \cdot a^3 \cdot (-1)^{-1} \cdot a^{-1}} = \frac{-a^{2+4} \cdot 16}{(-8) \cdot a^{3-1} \cdot (-1)} = \frac{-16 a^6}{8 a^2} \\
 &= -2 a^4
 \end{aligned}$$

6. Simplificar la expresión: $\frac{3x^{-2} \cdot 2y^4}{5x^{-5} \cdot y^2} \div \frac{1}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \frac{3x^{-2} \cdot 2y^4}{5x^{-5} \cdot y^2} \div \frac{1}{x} &= \frac{3x^5 \cdot 2y^4}{5x^2 \cdot y^2} \div \frac{x^{-1}}{y^2} = \frac{3x^{5-2} \cdot 2y^{4-2}}{5} \cdot \frac{y^2}{x^{-1}} \\
 &= \frac{3 \cdot 2x^3 y^2}{5} \cdot y^2 \cdot x = \frac{6x^{3+1} y^{2+2}}{5} = \frac{6x^4 y^4}{5}
 \end{aligned}$$

7. Simplificar la expresión, y expresar el resultado de manera que contenga sólo exponentes positivos. Suponer que todas las variables involucradas son positivas.

$$\frac{(3a^2b)^{-3}}{(2a^{-2}b)^2} \cdot \frac{(2a^2b)^{-1}}{(6ab)^{-2}} \cdot \frac{a}{b}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \frac{(3a^2b)^{-3}}{(2a^{-2}b)^2} \cdot \frac{(2a^2b)^{-1}}{(6ab)^{-2}} \cdot \frac{a}{b} &= \frac{3^{-3} a^{-6} b^{-3}}{2^2 a^{-4} b^2} \cdot \frac{2^{-1} a^{-2} b^{-1}}{2^{-2} 3^{-2} a^{-2} b^{-2}} \cdot \frac{a}{b} \\
 &= 2^{-1-2+2} 3^{-3+2} a^{-6-2+4+2+1} b^{-3-1-2+2-1} \\
 &= 2^{-1} 3^{-1} a^{-1} b^{-5} = \frac{1}{6ab^5}
 \end{aligned}$$

8. **Notación científica.** Es la notación que se usa para representar números reales positivos muy grandes ó muy pequeños en pocos símbolos, usando potencias de 10. Por ejemplo: $30456,2 = 3,04562 \cdot 10^4$; $0,000024 = 2,4 \cdot 10^{-5}$

Así, todo número real positivo puede escribirse en notación científica, en la forma:

$$t \cdot 10^n, \text{ donde } t \text{ es un número real tal que } 1 \leq t < 10 \text{ y } n \text{ es un número entero}$$

Expresar cada resultado usando notación científica.

- (a) Calcular el valor de: $\frac{3,15 \cdot m}{0,00000175}$, para $m = 0,000000000000000021$,
 (b) Calcular: $\frac{(3000)^3 \cdot (0,00008)^4}{(0,0012)^3}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{3,15 \cdot m}{0,00000175} &= \frac{315 \cdot 10^{-2} \cdot 21 \cdot 10^{-17}}{175 \cdot 10^{-8}} \quad \text{donde } m = 21 \cdot 10^{-17} \\ &= \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10^{-17-2+8}}{5^2 \cdot 7} = \frac{3^3 \cdot 7 \cdot 10^{-11}}{5} \\ &= 37.8 \cdot 10^{-11} = 3.78 \cdot 10^{-10} \\ \text{(b)} \quad \frac{(3000)^3 \cdot (0,00008)^4}{(0,0012)^3} &= \frac{(3 \times 10^3)^3 \cdot (8 \times 10^{-5})^4}{(12 \times 10^{-4})^3} \\ &= \frac{3^3 \cdot 10^9 \cdot 8^4 \cdot 10^{-20}}{3^3 \cdot 4^3 \cdot 10^{-12}} = \frac{3^3 \cdot 10^9 \cdot 2^{12} \cdot 10^{-20}}{3^3 \cdot 2^6 \cdot 10^{-12}} \\ &= 3^{3-3} \cdot 2^{12-6} \cdot 10^{9-20+12} = 2^6 \cdot 10 \\ &= 64 \cdot 10 = 6.4 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

9. Simplificar la expresión B , y expresar el resultado de manera que contenga sólo exponentes positivos.

$$B = a^{1/2} \cdot \left(\frac{a^{-2/3} \cdot (ab)^{5/3}}{b} \right)^{-1/2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} B &= a^{1/2} \cdot (a^{-2/3} \cdot a^{5/3} \cdot b^{5/3} \cdot b^{-1})^{-1/2} \\ &= a^{1/2} \cdot (a^{-2/3+5/3} \cdot b^{5/3-1})^{-1/2} = a^{1/2} \cdot (a^1 \cdot b^{2/3})^{-1/2} \\ &= a^{1/2} \cdot a^{(-1/2)} \cdot b^{(2/3)(-1/2)} = a^0 \cdot b^{-1/3} = \frac{1}{b^{1/3}} \end{aligned}$$

10. Simplificar cada expresión:

(a) $\sqrt[3]{8^2} : \sqrt{4^3}$

(b) $\frac{\sqrt{8a} \cdot \sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[6]{16a}}$, considerando a positivo.

(c) $\sqrt[6]{9m^2n^5} \cdot \sqrt[3]{9m^2n^8}$, considerando m, n positivos.

Solución:

(a) $\sqrt[3]{8^2} : \sqrt{4^3} = \frac{\sqrt[3]{2^6}}{\sqrt{2^6}} = \frac{2^{6/3}}{2^{6/2}} = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$

(b) $\frac{\sqrt{8a} \cdot \sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[6]{16a}} = \frac{\sqrt[6]{8^3a^3} \cdot \sqrt[6]{4^2a^4}}{\sqrt[6]{16a}} = \sqrt[6]{\frac{2^9a^3 \cdot 2^4a^4}{2^4a}} = \sqrt[6]{2^9a^6} = 2a\sqrt[6]{2^3} = 2a\sqrt{2}$

(c) $\sqrt[6]{9m^2n^5} \cdot \sqrt[3]{9m^2n^8} = \sqrt[6]{3m^2n^5} \cdot \sqrt[6]{(9m^2n^8)^2}$

$$= \sqrt[6]{9m^2n^5} \cdot \sqrt[6]{9^2m^4n^{16}} = \sqrt[6]{9^3m^6n^{21}}$$

$$= \sqrt[6]{3^6m^6n^{18}n^3} = 3mn^3 \sqrt[6]{n^3}$$

$$= 3mn^3 \sqrt{n}$$

11. Reducir a su forma más simple: $5\sqrt{8} - 2\sqrt{98} - 2\sqrt{50} + \sqrt{128}$

Solución:

$$5\sqrt{8} - 2\sqrt{98} - 2\sqrt{50} + \sqrt{128} = 5\sqrt{2^3} - 2\sqrt{2 \cdot 7^2} - 2\sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^7}$$

$$= 5 \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 7\sqrt{2} - 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2^3\sqrt{2}$$

$$= 10\sqrt{2} - 14\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$$

12. Reducir cada expresión a su forma más simple, considerando a y b números reales positivos:

(a) $B = b\sqrt{4a^2b} - a\sqrt{16ab^2} - \sqrt{a^2b^3} - \sqrt{a^3b^2}$

(b) $C = (6\sqrt{8a^2} + \sqrt[3]{32a^3} - \sqrt[4]{128a^4}) : (2\sqrt{2a^2})$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad B &= b\sqrt{2^2 a^2 b} - a\sqrt{4^2 a b^2} - \sqrt{a^2 b^2 b} - \sqrt{a^2 a b^2} \\
 &= 2ab\sqrt{b} - 4ab\sqrt{a} - ab\sqrt{b} - ab\sqrt{a} \\
 &= ab\sqrt{b} - 5ab\sqrt{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad C &= \frac{6\sqrt{8a^2} + \sqrt[3]{2^3 4a^3} - \sqrt[4]{2^7 a^4}}{2\sqrt{2a^2}} \\
 &= \frac{12a\sqrt{2} + 2a \cdot \sqrt[3]{4} - 2a \cdot \sqrt[4]{8}}{2a\sqrt{2}} = 6 + \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}} \\
 &= 6 + 2^{2/3-1/2} - 2^{3/4-1/2} = 6 + 2^{1/6} - 2^{1/4} \\
 &= 6 + \sqrt[6]{2} - \sqrt[4]{2}
 \end{aligned}$$

13. Simplificar la expresión: $\sqrt[3]{-8^2} - \sqrt{(-4)^2} + \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{a^3}$
- (a) considerando $a \geq 0$ (b) considerando $a < 0$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{-8} - \sqrt{(-4)^2} + \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{a^3} &= -2 - |-4| + |a| - a \\
 &= -2 - 4 + |a| - a \\
 &= -6 + |a| - a
 \end{aligned}$$

(a) Caso $a \geq 0$:

$$\sqrt[3]{-8} - \sqrt{(-4)^2} + \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{a^3} = -6 + |a| - a = -6 + a - a = -6$$

(b) Caso $a < 0$:

$$\sqrt[3]{-8} - \sqrt{(-4)^2} + \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{a^3} = -6 + |a| - a = -6 - a - a = -6 - 2a$$

14. Calcular: $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+9} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-9}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{6\sqrt{3}+9} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-9} &= \sqrt[3]{(6\sqrt{3}+9)(6\sqrt{3}-9)} \\
 &= \sqrt[3]{(36 \cdot 3 - 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 81)} = \sqrt[3]{27} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

15. Sea $a, b > 0$. Simplificar la expresión y expresar el resultado con exponentes positivos:

$$\sqrt[3]{\frac{a^{13}(a^3 \cdot b^{-2})^{-1}}{a^{-5}b^5}} \cdot \sqrt{\frac{a^5b^4}{a^3}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{a^{13}(a^3 \cdot b^{-2})^{-1}}{a^{-5}b^5}} \cdot \sqrt{\frac{a^5b^4}{a^3}} &= \sqrt[3]{\frac{a^{13} \cdot a^{-3} \cdot b^2}{a^{-5} \cdot b^5}} \cdot \sqrt{a^2b^4} = \sqrt[3]{a^{15} \cdot b^{-3}} \cdot a \cdot b^2 \\ &= \sqrt[3]{(a^5)^3 \cdot (b^{-1})^3} \cdot a \cdot b^2 = a^5b^{-1} \cdot a \cdot b^2 \\ &= a^6 \cdot b\end{aligned}$$

16. Simplificar la expresión: $\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}}$, considerando $x > 0$.

Solución:

Forma (1):
$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt[6]{(x^4)^2 \cdot x^3}}}{\sqrt{\sqrt[6]{(x^2)^2 \cdot (x^3)^3}}} = \frac{\sqrt[18]{x^8 \cdot x^3}}{\sqrt[12]{x^4 \cdot x^9}}$$

$$= \frac{\sqrt[18]{x^{8+3}}}{\sqrt[12]{x^{4+9}}} = \frac{\sqrt[18]{x^{11}}}{\sqrt[12]{x^{13}}} = \sqrt[36]{\frac{x^{22}}{x^{39}}}$$

$$= \sqrt[36]{x^{22-39}} = x^{-17/36} = \sqrt[36]{\frac{1}{x^{17}}}$$

Forma (2):
$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}} = \frac{\sqrt[3]{x^{4/3} \cdot x^{1/2}}}{\sqrt{x^{2/3} \cdot x^{3/2}}} = \frac{\sqrt[3]{x^{4/3+1/2}}}{\sqrt{x^{2/3+3/2}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^{11/6}}}{\sqrt{x^{13/6}}} = \frac{(x^{11/6})^{1/3}}{(x^{13/6})^{1/2}} = \frac{x^{11/18}}{x^{13/12}}$$

$$= x^{11/18-13/12} = x^{-17/36} = \sqrt[36]{\frac{1}{x^{17}}}$$

17. Determinar la veracidad o falsedad de cada afirmación, justificando su respuesta.

(a) $3 \cdot 3^n$ es igual a 9^n , para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(b) $(-7)^{-2n}$ es un número real positivo, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(c) $\frac{-5^n}{(-5)^n} = -1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Solución:

(a) FALSO: Por ejemplo, para $n = 2$: $3 \cdot 3^2 = 27$, y $9^2 = 81$, son distintos.

(b) VERDADERO: $(-7)^{-2n} = ((-7)^2)^{-n} = 49^{-n} > 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$

(c) FALSO: $\frac{-5^n}{(-5)^n} = \frac{-5^n}{(-1)^n 5^n} = \frac{-1}{(-1)^n} = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

U. de Talca