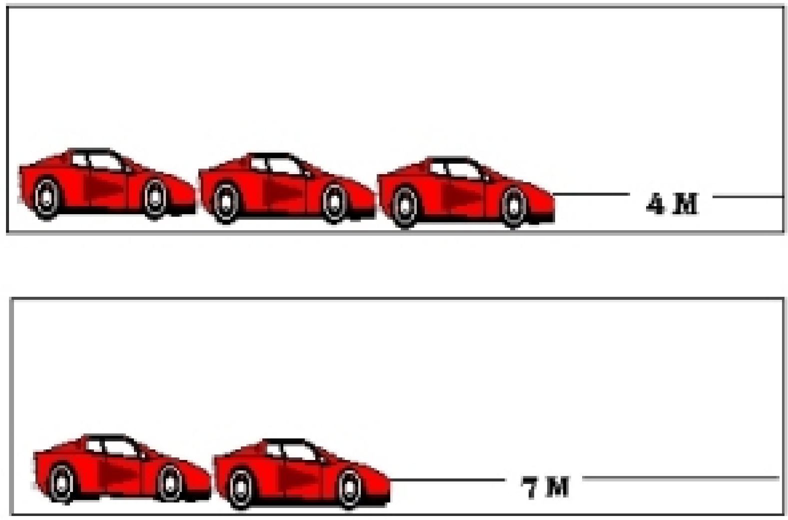
1. En el siguiente dibujo todos los autos son iguales:



Determinar el largo de cada auto.

Solución:

Sea x el largo de cada auto.

De acuerdo a la figura, la ecuación que modela este problema es:

$$3x + 4 = 2x + 7$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que $x = 3$.

Respuesta: Cada auto mide 3 metros.

2. Un farmacéutico debe preparar 15ml de gotas especiales para un paciente con glaucoma. La solución debe tener 2% de ingrediente activo, pero sólo tiene disponibles soluciones al 10% y al 1%. ¿Qué cantidad de cada solución debe usar para completar la receta?

Solución:

Sea $x =$ cantidad de ml de la solución al 10%

Para ayudar a entender el problema, se traza un esquema, como el siguiente.

	A	B	C
Cantidad de ml en cada caso	x	$15 - x$	15
Cantidad de ingrediente activo en cada caso	$0.1x$	$0.01(15 - x)$	$0.02 \cdot 15$

Luego, la ecuación que modela este problema es:

$$0.1x + 0.01(15 - x) = 0.02 \cdot 15$$

Resolviendo esta ecuación (lineal) se obtiene que $x = \frac{5}{3} \approx 1.7$.

Respuesta: Se deben usar 1.7ml de la solución al 10% y 8.3ml de la solución al 1%, para obtener 15ml al 2%.

3. Un corredor inicia en el principio de una pista y corre a velocidad constante de 10 Km/h. Cinco minutos después, un segundo corredor comienza en el mismo punto, y su velocidad es de 13 Km/h, siguiendo por la misma pista. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo corredor en alcanzar al primero?

   Solución:

   Sea t el número de horas que recorre el primer corredor. Como el segundo corredor sale 5 minutos ($\frac{1}{12}$ horas) después que el primero, el tiempo que recorre el segundo es $(t - \frac{1}{12})$ horas. Esto conduce a la siguiente tabla.

Corredores	Velocidad Km/h	Tiempo Horas	distancia Km.
Primero	10	t	$10t$
Segundo	13	$t - \frac{1}{12}$	$13(t - \frac{1}{12})$

Luego, como en el momento en que el segundo corredor alcanza al primero, ambos han recorrido la misma distancia, la ecuación que modela este problema es:

$$10t = 13(t - \frac{1}{12})$$

Resolviendo esta ecuación (lineal) se obtiene que $t = \frac{13}{36} \approx 0.36$horas $= 21.6$min.

Respuesta: El segundo corredor alcanza al primero en 21.6min, aproximadamente.

4. Una empresa fabrica un producto que tiene costos variables de \$6 por unidad y costos fijos de \$80. Cada unidad tiene un precio de venta de \$10. Determinar el número de unidades que deben vender para que la compañía obtenga utilidades de \$60 y calcular el margen por unidad.

   Respuesta:

   Se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Utilidades} &= \text{Ingresos totales} - \text{Costos totales} \\ \text{Ingresos totales} &= \text{Cantidad vendida} \times \text{precio de venta} \\ \text{Costos totales} &= \text{Costos variables} + \text{Costos fijos} \end{aligned}$$

   Sea $q =$ número de unidades que deben ser vendidas.

   Luego el modelo para el problema es:

$$10q - (6q + 80) = 60$$

Resolviendo esta ecuación lineal se tiene que:

$$\begin{aligned} 10q - (6q + 80) &= 60 \\ 4q - 80 &= 60 \\ 4q &= 140 \\ \text{de donde se obtiene} \quad q &= 35 \end{aligned}$$

Respuesta: Es necesario vender 35 unidades para obtener utilidades de \$60.

5. Un grupo de jóvenes decide pagar por partes iguales el arriendo de \$14.000 de un bote. A última hora, tres de los jóvenes se arrepintieron, con lo cual la cuota de cada uno de los restantes jóvenes subió en \$1.500.

   (a) ¿Cuántos jóvenes había en el grupo original?

   (b) ¿Cuánto pagó cada uno de los jóvenes del grupo final?

   Solución:

   Sea n el número inicial de jóvenes. Ordenemos la información del problema en la siguiente tabla.

	Número de jóvenes	Valor cuota de c/u
Situación inicial	n	$\frac{14000}{n}$
Situación posterior	$n-3$	$\frac{14000}{n-3}$

Como la cuota inicial sube en \$1500, se tiene que la ecuación que modela este problema es:

$$\frac{14000}{n-3} = \frac{14000}{n} + 1500$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene que ella se reduce a:

$$n^2 - 3n - 28 = 0$$

Resolviendo esta ecuación (cuadrática) se obtiene que sus soluciones son: $n = 7$ y $n = -4$

Claramente, la solución $n = -4$, no puede dar una solución a este problema. Luego,

Respuesta:

(a) En el grupo inicial habían 7 jóvenes.
(b) Cada jóven del grupo final pagó \$3500 ($= \frac{14000}{4}$)

6. La liquidación de sueldos de un empleado de la empresa "*Bienvenidos!!*" es la siguiente:

Sueldo base	....
Isapre (7%)	....
AFP (10 %)	....
Sueldo líquido	\$ 257.000

en base a la información entregada determinar:

(a) Su sueldo base
(b) El descuento de la Isapre
(c) El descuento de la AFP

Solución: Sea x = sueldo base. Luego:

Sueldo base	x
Isapre (7%)	$0.07x$
AFP (10 %)	$0.1x$
Sueldo líquido	\$ 257.000

Por lo tanto la ecuación que modela este problema es:

$$x - 0.07x - 0.1x = 257.000$$

Resolviendo esta ecuación, se tiene que $x = 309.638, 5$

Respuesta: Los valores pedidos son (aproximados):

(a) Su sueldo base es $\$309.638, 5$

(b) El descuento de la Isapre es $\$21.6746, 9$

(c) El descuento de la AFP es $\$30.963, 8$

7. Juan tiene un perro. Actualmente su perro tiene 12 años menos que él. Dentro de 4 años, Juan tendrá el triple de la edad de su perro.¿Cuál es la edad de Alex y su perro?

Solución:

Sea x la edad actual de Juan.

Ordenemos la información entregada en este problema en la siguiente tabla:

	Hoy	En 4 años
Juan	x	$x + 4$
su perro	$x - 12$	$(x - 12) + 4 = x - 8$

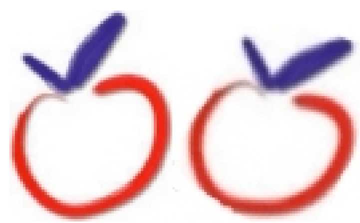
Luego, la ecuación que modela este problema es:

$$x + 4 = 3(x - 8)$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} x+4 &= 3(x-8) \\ x+4 &= 3x-24 \\ -2x &= -28 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Respuesta: La edad de Juan es 14 años y la edad de su perro es 2 años.



8. La familia Verdana tiene una huerta con 90 plantas de tomates. El número de plantas de cada fila excede en 3 al doble del número de filas. Determinar el número de filas y el número de plantas por fila.

   Solución:

   (a) Sea $x =$ número filas.

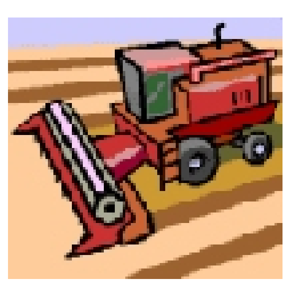
   (b) Datos:

N de filas	N de plantas en c/fila	Total de plantas
x	$2x+3$	$x(2x+3)$

   (c) Ecuación: $x(2x+3) = 90$
   equivalente a: $2x^2 + 3x - 90 = 0$

   (d) Resolviendo la ecuación, se obtiene: $x = 6$ o $x = -\dfrac{15}{2}$.

   Respuesta: Ya que, el número de filas debe ser un número entero positivo, luego: en la huerta hay 6 filas, y en cada fila hay $2 \cdot 6 + 3 = 15$ plantas de tomates.



9. Se debe preparar un terreno cuadrado para sembrarlo y cercarlo con alambre. Si el costo por preparar el terreno es de \$0.5 dólares por metro cuadrado, y la cerca cuesta \$1 dólar el metro lineal. Determinar las dimensiones del terreno si el costo por prepararlo y cercarlo es de \$120 dólares.

   Solución:

   (a) Sea x = ancho del terreno = largo del terreno.

   (b) Organizando los datos:
   Perímetro del terreno $= 4x\, metros$
   Área del terreno $= x^2\, metros^2$

Costo en dólares por:			
Cercar $1m$	Cercar todo el terreno	Preparar 1 m^2	Preparar todo el terreno
1	$1 \cdot (4x)$	0.5	$0.5 \cdot x^2$

   (c) Considerando los datos del problema, se obtiene la ecuación:
   $$4x + 0.5x^2 = 120$$

   (d) Resolviendo la ecuación se obtiene: $x = 12$ o $x = -20$.

   Respuesta: Como las dimensiones del terreno deben ser números positivos, luego, la medida de cada lado del cuadrado es $12\,m$.

10. Hay que repartir \$60.000 entre cierto número de amigos, presentes en una reunión, en partes iguales. Alguien nota que si hubieran dos amigos menos, a cada uno le correspondería \$2.500 más. Cuántos son los amigos presentes y cuánto le corresponde a cada uno?

    Solución:

    (a) Sea x = número de amigos del grupo original.

    (b) Organizando los datos en una tabla:

Número de amigos	Cantidad a pagar, por persona
x	$\dfrac{60000}{x}$
$x-2$	$\dfrac{60000}{x-2}$

(c) Se obtiene la ecuación:

$$\frac{60000}{x-2} = \frac{60000}{x} + 2500$$

(d) Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{60000}{x-2} &= \frac{60000}{x} + 2500 \\ 60000x &= 60000(x-2) + 2500x(x-2) \\ 2500x^2 - 5000x - 12000 &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son: $x = 8$ o $x = -6$. Se puede verificar que también lo son de la ecuación original.

Respuesta: Ya que, el número de amigos debe ser un número no negativo, se encuentra que, el grupo original estaba conformado por 8 amigos.

11. Dos trabajadores A y B realizan juntos una tarea en 10 días. Trabajando por separado, el trabajador A tardaría 5 días más que B. Determinar el número de días que tardaría en realizar la tarea cada uno de ellos trabajando por separado.

Solución:

(a) Sea $t =$ tiempo requerido por A en efectuar la tarea, en días.
Luego, el trabajador B demora $t - 5$ días.

(b) Datos:

trabajador	tiempo que demora en hacer la tarea (en días)	Cantidad de la tarea que realiza en 1 día
A	t	$\frac{1}{t}$
B	$t-5$	$\frac{1}{t-5}$
juntos A y B	10	$\frac{1}{10}$

(c) Luego, la ecuación que se obtiene es:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t-5} = \frac{1}{10}$$

(d) Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} 10\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-5}\right) &= 1 \\ 10(2t-5) &= t(t-5) \\ t &= \frac{25 \pm \sqrt{425}}{2} \end{aligned}$$

las soluciones de la ecuación son: $t_1 \approx 22.8$, $t_2 \approx 2.2$.

(e) Como la solución 2.2 no puede ser, luego $t \approx 22.8$

Respuesta: El trabajador A demora aproximadamente 22.8 días, y el trabajador B demora aproximadamente $22.8 - 5 = 17.8$ días.

12. La corriente de un río tiene una velocidad de $3km/h$. Un bote recorre $40km$ contra la corriente y $40km$ con la corriente en un total de 14 horas. Determinar la velocidad del bote en aguas tranquilas. +

Solución:

(a) Datos:

$$\begin{cases} \text{Distancia recorrida en contra:} & \text{40km con la corriente} \\ \text{Distancia recorrida a favor:} & \text{40km en contra corriente} \\ \text{Tiempo total (ida y vuelta):} & \text{14hrs} \end{cases}$$

Sea $v =$ la velocidad del bote en aguas tranquilas.

Se utilizará la fórmula: $\boxed{tiempo\ en\ h = \dfrac{distancia\ en\ km}{velocidad\ en\ km/h}}$.

(b) Organizando los datos:

	distancia(km)	velocidad(km/h)	tiempo
con la corriente	40	$v+3$	$\dfrac{40}{v+3}$
contra la corriente	40	$v-3$	$\dfrac{40}{v-3}$

(c) Ecuación:
El tiempo total fue de l4 horas, se puede expresar:

$$\frac{40}{v+3} + \frac{40}{v-3} = 14$$

ecuación que permite determinar v.

(d) Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{40}{v+3} + \frac{40}{v-3} &= 14 \\ 80v &= 14(v+3)(v-3) \\ 80v &= 14v^2 - 126 \\ 14v^2 - 80v - 126 &= 0 \end{aligned}$$

Soluciones: $v_1 = -\dfrac{9}{7} \vee v_2 = 7$

Respuesta: Por lo tanto la velocidad del bote en aguas tranquilas es de $7km/h$.

Foto: Pacas de algodón en la región de Korhogo
Costa de Marfil

13. Un comerciante rehúsa vender en 15000 pesos un cierto número de pacas de algodón. Dos meses más tarde, cuando el precio ha subido 5 pesos por paca, las vende en 15190 pesos. Si en el curso de los dos meses se destruyeron dos pacas, encontrar el precio por paca de la primera oferta y el número original de ellas.

Solución:

(a) Sean: $\begin{cases} \text{y=} & \text{cantidad de pacas de algodón} \\ \text{x=} & \text{costo de cada paca en pesos} \end{cases}$

(b) Organizando los datos:

	Cant. de pacas	Precio unitario	Precio total
antes	y	x	$x\,y$
después de 2 meses	$y-2$	$x+5$	$(x+5)(y-2)$

(c) Ecuaciones: $\begin{cases} (1) & \text{xy} = 15000 \\ (2) & \text{(x+5)(y-2)=15190} \end{cases}$

Despejando y en la ecuación (1), se obtiene: $y = \dfrac{15000}{x}$.

Sustituyendo y en la ecuacin (2) se obtiene una ecuación en x:

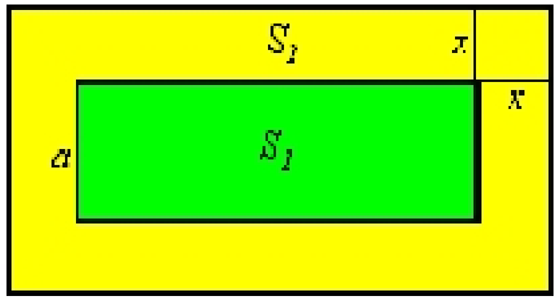
$$(x+5)\left(\frac{15000}{x} - 2\right) = 15190$$

(d) Resolviendo la ecuación en x:

$$\begin{aligned} (x+5)\left(\frac{15000}{x} - 2\right) &= 15190 \\ (x+5)\left(\frac{15000-2x}{x}\right) &= 15190 \\ x^2 + 100x - 37500 &= 0 \\ \text{soluciones de la ecuación:} \quad x_1 = 150 &\vee \quad x_2 = -300 \end{aligned}$$

Las soluciones son: $x_1 = 150, \quad x_2 = 300.$

Respuesta: Para este problema sirve $x = 150$. Por lo tanto cada paca costaba 150 pesos en la primera oferta y originalmente había un total de 100 pacas.



14. Un terreno deportivo tiene forma rectangular, de tal manera que la medida de su ancho es $a\,cm$, y la medida de su largo es el triple de la medida de su ancho. El terreno se encuentra rodeado de una pista cuyo borde exterior también es rectangular, de lados paralelos a los del terreno y separados del terreno a la misma distancia.

    Determinar el ancho de la pista en términos de la medida del ancho del terreno, para que el área de la pista y la del terreno sean iguales.

    Solución:

    (a) Sea $x =$ ancho de la pista que rodea el terreno deportivo.

    (b) Estableciendo relaciones:

(1)	Medida del largo del terreno	$= 3a\ cm$
(2)	Área del terreno	$= 3a^2\ cm^2$
(3)	Dimensiones del rectángulo que rodea la pista (exterior):	ancho $= 2x + a$; largo $= 2x + 3a$
(3)	Área de la pista	$= (2x + a)(2x + 3a) - 3a^2$

    (c) Se obtiene la ecuación en x:

    $$(2x + a)(2x + 3a) - 3a^2 = 3a^2$$

    (d) Resolviendo la ecuación:

    $$\begin{aligned} (2x + a)(2x + 3a) - 3a^2 &= 3a^2 \\ 4x^2 + 8ax + 3a^2 - 3a^2 &= 3a^2 \\ 4x^2 + 8ax - 3a^2 &= 0 \\ x &= \frac{-8a \pm 4a\sqrt{7}}{8} \qquad a > 0 \end{aligned}$$

    $$x = a\left(\frac{\sqrt{7} - 2}{2}\right) \approx 0.3228\,a \quad \vee \quad x = a\left(\frac{-\sqrt{7} - 2}{2}\right) \approx -2.3228\,a$$

    Respuesta: Por las condiciones del problema, $x > 0$. Luego, la medida del ancho de la pista, en términos de a es:

    $$x = \left(\frac{\sqrt{7} - 2}{2}\right) a \approx 0.3228\,a$$

15. Hallar tres números reales, sabiendo que el segundo es mayor que el primero en la misma cantidad que el tercero es mayor que el segundo, que el producto de los dos más pequeños es 85 y que el producto de los dos mayores es 115.

Solución:

(a) Sean x, y, z los tres números buscados, tales que $x \leq y \leq z$.

(b) Estableciendo relaciones, según los datos del enunciado del problema:

$$\begin{array}{rrl} (1) & y - x = z - y & \Longrightarrow y = \dfrac{x+z}{2} \\ (2) & x \cdot y = 85 & \Longrightarrow x = \dfrac{85}{y} \\ (3) & y \cdot z = 115 & \Longrightarrow z = \dfrac{115}{y} \end{array}$$

(c) Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene una ecuación en y:

$$y = \frac{\dfrac{85}{y} + \dfrac{115}{y}}{2}$$

(d) Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\dfrac{85}{y} + \dfrac{115}{y}}{2} \\ 2y &= \frac{85 + 115}{y} \\ y^2 &= 100 \\ y = 10 \quad &\vee \quad y = -10 \end{aligned}$$

(e) $y = 10 \quad \Longrightarrow \quad x = 8,5 \quad \wedge \quad z = 11,5$
$y = -10 \quad \Longrightarrow \quad x = -8,5 \quad \wedge \quad z = -11,5$

Respuesta: Por las condiciones del problema, $x \leq y \leq z$. Luego, los números buscados son:

$$x = 8,5; \qquad y = 10; \qquad z = 11,5$$

16. Dos ciclistas A y B parten de un punto P al mismo tiempo y en direcciones que forman un ángulo recto entre sí. El ciclista B se desplaza a 7 km/h más rápido que A. Después de 3 horas se encuentran a 39km de distancia uno del otro.

    Determinar la velocidad de cada ciclista.

    Solución:

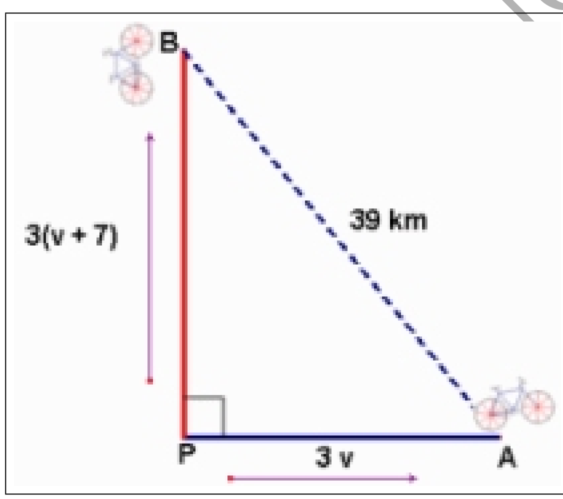
    (a) Sea $v =$ velocidad del ciclista A.

    (b) Organizando los datos:

    Nota: $\quad velocidad = \dfrac{distancia}{tiempo} \implies \quad distancia = (velocidad)(tiempo)$

Ciclista	Velocidad (km/hora)	Tiempo (horas)	Distancia (km)
A	v	3	$3\,v$
B	$v+7$	3	$3(v+7)$

    (c) Figura que representa la situación:



    (d) Usando el teorema de Pitágoras en el triánglo rectángulo BPA, recto en P, se obtiene la ecuación en la variable v:

$$(3(v+7))^2 + (3v)^2 = 39^2$$

    (e) La ecuación a resolver es equivalente a:

$$v^2 + 7v - 60 = 0$$

    Las soluciones de la ecuación son: $\quad v = -12 \quad$ o $\quad v = 5$.

Respuesta: Luego, las velocidades de cada ciclista son 5km/h y 12km/h respectivamente.