

1. Racionalizar el denominador y simplificar la expresión $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{xy^2}}$

Solución:

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{xy^2}} = \frac{2^{\frac{1}{4}} (xy^2)^{\frac{2}{3}}}{(xy^2)^{\frac{1}{3}} (xy^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{12}} (xy^2)^{\frac{8}{12}}}{xy^2} = \frac{\sqrt[12]{2^3 x^8 y^{16}}}{xy^2} = \frac{\sqrt[12]{8x^8 y^{16}}}{xy^2}$$

2. Racionalizar el denominador de $\frac{5}{2 + \sqrt{2}}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2 + \sqrt{2}} &= \frac{5}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{5(2 - \sqrt{2})}{4 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{5(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} \\ &= \frac{10 - 5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

3. En algunas ocasiones es conveniente racionalizar el numerador de una fracción. Racionalizar el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

4. Racionalizar al numerador de la expresión $\frac{x^2 - \sqrt{x+1}}{x}$.

Solución: Amplificando por $x^2 + \sqrt{x+1}$ se tiene:

$$\frac{x^2 - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{x^2 - \sqrt{x+1}}{x} \cdot \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{x^2 + \sqrt{x+1}} = \frac{x^4 - (x+1)}{x(x^2 + \sqrt{x+1})}$$

5. Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$

Solución:

Observar que en este caso, *no sirve* amplificar por $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$

Usando la factorización

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

con $a = \sqrt[3]{x}$ y $b = \sqrt[3]{y}$ se tiene

$$x - y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$$

de donde se deduce que el factor adecuado para racionalizar la fracción propuesta es: $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$.

Luego:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y}$$

6. Racionalizar el denominador de $\frac{4}{\sqrt[3]{1-x^3} + x}$.

Solución:

En este caso usamos la factorización de la suma de dos cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Haciendo $a = \sqrt[3]{1-x^3}$ y $b = x$:

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt[3]{1-x^3}+x} &= \frac{4}{\sqrt[3]{1-x^3}+x} \cdot \frac{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + (1-x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + (1-x^3)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{4(x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + (1-x^3)^{\frac{2}{3}})}{\sqrt[3]{(1-x^3)^3} + x^3} \\ &= \frac{4(x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + (1-x^3)^{\frac{2}{3}})}{(1-x^3) + x^3} \\ &= 4(x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + (1-x^3)^{\frac{2}{3}})\end{aligned}$$

U. de Talca