1. Establecer cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas y cuáles son falsas. En las falsas proporcionar un contraejemplo. En las verdaderas justificar adecuadamente.

   (a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
   (b) Si $a^2 = 1$, entonces $a = 1$
   (c) Si $x < 1$, entonces $x^2 < 1$
   (d) $0.999... = 1$
   (e) Si $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$

   Solución:

   (a) V, pués si $a \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$.
   (b) F, ya que para $a = -1$ se tiene que: $a^2 = 1$, pero $a \neq 1$.
   (c) F, ya que para $x = -4$ se tiene que: $x < 1$, pero $x^2 = 16 > 1$.
   (d) V, pués si $a = 0.999... \Rightarrow 10a = 9.999... \Rightarrow 10a - a = 9 \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$.
   (e) F, ya que $0 \cdot 3 = 0 \cdot 5$, pero $3 \neq 5$. Nota: Recordar que esta propiedad es válida justamente cuando $a \neq 0$.

2. Responder las siguientes preguntas. Justificar su respuesta.

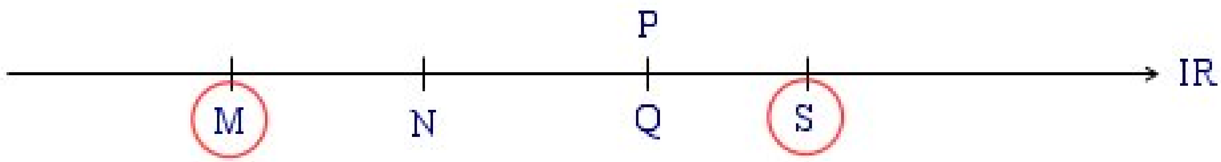
   (a) ¿Cuánto debe añadirse a $\frac{2}{9}$ para obtener la unidad?
   (b) ¿Cuál es la mitad de $\frac{1}{2}$?
   (c) ¿Por cuánto hay que dividir $\frac{5}{3}$ para obtener 2?
   (d) ¿Cuál es el número cuyos $\frac{2}{5}$ corresponden al número 36?

   Solución:

   (a) $\dfrac{7}{9}$, pues $\frac{2}{9} + \frac{7}{9} = 1$.
   (b) $\dfrac{1}{4}$, la mitad de $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
   (c) $\dfrac{5}{6}$. En efecto: $\frac{5}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} = 2$.
   (d) 90. En efecto: $\frac{2}{5} \cdot 90 = 36$.

3. M es menor que N, P es igual a Q, P es mayor que N y Q es menor que S. ¿Cómo es M en relación a S?.

   Solución: Ordenemos la información entre los números en una recta real:



Por lo tanto, $M < S$.

4. Comprobar que la suma de dos números pares es un número par.

   Solución: Sean $x,\ y$ dos números pares por lo tanto existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $x = 2n, \quad y = 2m$ luego:

$$\begin{aligned} x + y &= 2n + 2m \\ &= 2(n+m) \end{aligned}$$

   como $(n+m) \in \mathbb{Z}$, entonces $2(n+m)$ es un número par.

5. Verificar que si $a \in \mathbb{Z}$, entonces a es par $\iff$ a^2 es par.

   Solución: $\Longrightarrow$) Si a es par, existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2n$. De donde $a^2 = 4n^2 = 2(2n)$. Luego a^2 es par.

   $\Longleftarrow$) En este caso se tiene que a^2 es par, por demostrar que a es par.

   Demostración (Indirecta)

   Supongamos que a es impar, entonces $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2n+1$, luego $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, de donde a^2 es impar, lo que contradice nuestra suposición. Luego a no es impar, es decir, a es par.

6. Un antiguo problema es encontrar una fórmula que sólo entregue números primos. Tal problema aún permanece sin solución.

   Considerar la expresión $P = n^2 - n + 41$

   (a) Calcular P para $n = 1, 2, 3, \cdots, 10$

   (b) De los valores calculados en (a), ¿cuáles de ellos son primos?, ¿qué conjetura sugiere este resultado?

   (c) Calcular P para $n = 41$. Comentar.

Solución:

(a)

n	$\cdots$	$P = n^2 - n + 41$
1	$\to$	41
2	$\to$	43
3	$\to$	47
4	$\to$	53
5	$\to$	61
6	$\to$	71
7	$\to$	83
8	$\to$	97
9	$\to$	113
10	$\to$	131

(b) Todos son primos!

La conjetura sugerida es que: *la fórmula propuesta, representa un número primo para cada* $n \in \mathbb{N}$

(c) Para $n = 41$, $P = 1681 = 41 \cdot 41$ que no es primo. Luego la conjetura sugerida en (b) es incorrecta.

7. Una regla de divisibilidad por 9 es:

   "Un número N es divisible por 9 siempre y cuando la suma de sus dígitos es divisible por 9".

   Demostrar esta regla para el caso de un número natural de 4 dígitos.

   Solución: Sea $adcd$ un número natural de 4 dígitos, luego se quiere demostrar que

$$abcd \text{ es divisible por } 9 \iff a+b+c+d \text{ es divisible por } 9.$$

$\Rightarrow$) Sea

$$\begin{aligned} N &= abcd \\ N &= 1000a + 100b + 10c + d \\ N &= 999a + 99b + 9c + d + a + b + c \\ N &= 9(111a + 11b + c) + a + b + c + d \end{aligned}$$

como N es divisible por 9: $N = 9n,\ n \in \mathbb{Z}$. Luego:

$$9n = 9(111a + 11b + c) + a + b + c + d$$

de donde:

$$a+b+c+d = 9n - 9(111a+11b+c) = 9(n-111a-11b-c)$$

Es decir, $a+b+c+d$ es divisible por 9.

$\Leftarrow$) Análogo.

8. Encontrar una fracción de enteros equivalente al decimal 76.123

Solución:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Sea} & x & = & 76.123 & / \cdot 1000 \\
 & 1000 \cdot x & = & 76123 & / \frac{1}{1000} \\
 & x & = & \frac{76123}{1000} &
\end{array}$$

Por lo tanto $76.123 = \dfrac{76123}{1000}$

9. Encontrar una fracción de enteros equivalente al decimal $5.777... = 5.\overline{7}$

Solución:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Sea} & x & = & 5.777... & / \cdot 10 \\
 & 10 \cdot x & = & 57.777... & \text{restando:} \\
 & 10 \cdot x - x & = & 57.777... - 5.777... & \text{de donde:} \\
 & 9 \cdot x & = & 52 & / \cdot \frac{1}{9} \\
 & x & = & \frac{52}{9} &
\end{array}$$

Por lo tanto $5.\overline{7}... = \dfrac{52}{9}$

10. Encontrar una fracción de enteros equivalente al decimal $35.42737373... = 35.4\overline{273}$

Solución:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Sea} & x & = & 35.42737373... & \text{de donde} \\
 & 10000 \cdot x & = & 354273.737373... & \\
 & 100 \cdot x & = & 3542.737373... & \text{restando} \\
 & 10000 \cdot x - 100 \cdot x & = & 350731 & \text{de donde:} \\
 & 9900 \cdot x & = & 350731 & / \cdot \frac{1}{9} \\
 & x & = & \frac{350731}{9900} &
\end{array}$$

Por lo tanto $35.42\overline{73}... = \dfrac{350731}{9900}$

11. La solución x de la ecuación $x^2 = 2$ es un número irracional.

Solución:

Suponer que la solución de la ecuación $x^2 = 2$ sea un número racional. Luego, existen enteros a y b, con $b \neq 0$, tal que $\frac{a}{b} = 2$. Es posible que los números enteros a y b tengan factores comunes, de ser así, simplificar la fracción $\frac{a}{b}$ hasta que no haya factores comunes entre su numerador y denominador. Sea $\frac{c}{d}$ la fracción así obtenida. Observar que

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y
- c y d no tienen factores en común.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{d}\right)^2 &= 2 \\ \frac{c^2}{d^2} &= 2 \\ c^2 &= 2 \cdot d^2 \quad (*) \end{aligned}$$

De donde c^2 es par. Luego, ver **Ejercicio resuelto 5**, c es par. Por lo tanto existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = 2 \cdot n \quad (**)$$

Reemplazando $(**)$ en $(*)$, se tiene:

$$\begin{aligned} (2 \cdot n)^2 &= 2 \cdot d^2 \\ 4 \cdot n^2 &= 2 \cdot d^2 \\ 2 \cdot n^2 &= d^2 \end{aligned}$$

Luego, d^2 es par, y por lo tanto, d es par. De aquí, existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $d = 2 \cdot m$. Este resultado junto a $(**)$, muestran que c y d tienen al número 2 como factor común. Esto contradice el hecho que c y d no tenían factores comunes.

Por lo tanto, es imposible expresar x como un cuociente de enteros, es decir, x, solución de la ecuación $x^2 = 2$, no es un número racional.

12. Un abogado recupera el 60% de una demanda de M$700 y cobra por sus servicios el 15% de la suma recuperada. ¿Qué cantidad recibirá su cliente?

    Solución: El abogado recupera el 60% de M$700 que es M$420. Como él cobra el 15% de lo recuperado (M$420), se queda con M$63. Por lo tanto el cliente se queda con la suma de M$357.