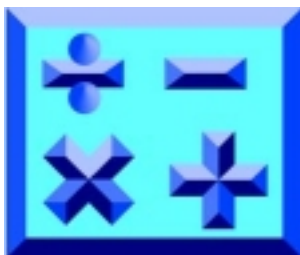


En álgebra es esencial manejar símbolos con objeto de transformar o reducir expresiones algebraicas y resolver ecuaciones algebraicas.



Debido a que muchos de estos símbolos representan números reales, es importante revisar brevemente el sistema de éstos y algunas de sus propiedades fundamentales. Estas propiedades proporcionan las reglas básicas para manejar los símbolos en álgebra. Como es conocido, en el conjunto de los números reales, existen dos operaciones básicas: la *adición* y la *multiplicación*. Estas operaciones, que se anotan por $+$ y $\cdot$ respectivamente, satisfacen las siguientes propiedades:

Propiedades de la Adición y la multiplicación

1. *Clausura*: La suma y producto de dos números reales arbitrarios es un número real.
2. *Asociatividad*: Dado 3 números reales arbitrarios x , y y z , se cumplen:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad x(yz) = (xy)z$$

es decir,

Al sumar o multiplicar tres números, el resultado no depende del orden en que se realicen las operaciones

3. *Elemento neutro*:

- El número 0, llamado *neutro aditivo*, cumple que para todo real x :

$$x + 0 = x$$

es decir,

Todo número sumado con 0 es igual a dicho número

- El número 1, llamado *neutro multiplicativo*, cumple que para todo real x :

$$x \cdot 1 = x$$

es decir,

Todo número multiplicado con 1 es igual a dicho número

4. *Elementos inversos:*

- **Inverso Aditivo:** Para cada número real x , existe el número $-x$, llamado *inverso aditivo* de x u *opuesto de x* , tal que:

$$x + (-x) = 0$$

es decir,

Todo número real sumado con su inverso aditivo es igual a 0

- **Inverso Multiplicativo:** Para cada número real x , **distinto de 0**, existe el número x^{-1} ($= \frac{1}{x}$), llamado *inverso multiplicativo* de x , tal que:

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

es decir,

Todo número real (no nulo) multiplicado con su inverso multiplicativo es igual a 1

5. *Conmutatividad:* Dado 2 números reales arbitrarios x e y , se cumple:

$$x + y = y + x \quad xy = yx$$

es decir,

El resultado obtenido al sumar o multiplicar 2 números, es independiente del orden en que se efectúe la suma

Observación: En $\mathbb{R}$ existen dos operaciones más: la sustracción ($-$) y la división ($:$). Ellas vienen definidas por:

Sustracción:

$$x - y = x + (-y)$$

División:

$$x : y = \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}, \quad y \neq 0$$

Propiedades generales :

1. Para x, a, b, c, d , números reales se cumple:

(a) Ley de simplificación:

- Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$
- Si $ab = ac$, $a \neq 0$, entonces $b = c$

(b) Posibilidad de sustracción: Si $a + x = b$, entonces $x = b - a$

(c) Posibilidad de división: Si $ax = b$, $a \neq 0$, entonces $x = \frac{b}{a}$

(d) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$

(e) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

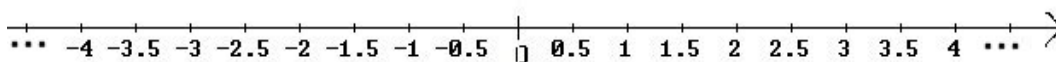
(f) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

(g) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

Recta real

Cada número real se puede identificar con uno y sólo punto de una recta horizontal, en la que se ha fijado un punto O . El punto O se identifica con el número real 0.

Eligiendo una unidad, cada número real positivo se identifica con un punto de la recta real a la derecha de O , y cada número real negativo con un punto a la izquierda de O , como se muestra en la figura:



- $\mathbb{R}^+$ denota al conjunto de los números reales positivos.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones:

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{o} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

Notaciones: * $a > 0 \iff a \in \mathbb{R}^+$ * $a < 0 \iff -a \in \mathbb{R}^+$

Desigualdades

Una desigualdad es una relación entre dos expresiones relacionadas con uno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$.

- **Definición:** Sean a, b dos números reales; a es menor que b , denotado $a < b$ se define:

$$a < b \iff b - a \text{ es un número real positivo.}$$

- Otras desigualdades son:

Menor o igual que: $a \leq b \iff (a < b \text{ o } a = b)$

Mayor que: $a > b \iff b < a$

Mayor o igual que: $a \geq b \iff (a > b \text{ o } a = b)$

Nota: Si $x > a$ y $x < b$, se escribe $a < x < b$.

Ejemplo: $-2 < x < 5$: significa que $(x > -2 \text{ y } x < 5)$

- **Propiedades de las desigualdades**

P1) $a < b \xRightarrow{\text{sumando } c} a + c < b + c$

Ejemplo

$$2 < 5 \implies 2 + 3 < 5 + 3$$

$a < b \xRightarrow{\text{restando } c} a - c < b - c$

$$2 < 5 \implies 2 - 3 < 5 - 3$$

P2) $a < b \text{ y } c > 0 \implies a \cdot c < b \cdot c$

$$2 < 5 \implies 2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$$

$a < b \text{ y } c > 0 \implies \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

$$2 < 5 \implies \frac{2}{3} < \frac{5}{3}$$

P3) $a < b \text{ y } c < 0 \implies a \cdot c > b \cdot c$

$$2 < 5 \implies 2(-1) > 5(-1)$$

$a < b \text{ y } c < 0 \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

$$2 < 5 \implies \frac{2}{-3} > \frac{5}{-3}$$

P4) $a < b \text{ y } c < d \implies a + c < b + d$

$$2 < 5 \text{ y } -3 < 7 \implies 2 + (-3) < 5 + 7$$

P5) $0 \leq a < b \implies a^2 < b^2$

$$2 < 5 \implies 2^2 < 5^2$$

P6) $0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$$2 < 5 \implies \frac{1}{2} > \frac{1}{5}$$

Otras propiedades de las desigualdades

- $a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$
 $a \cdot b < 0 \iff (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b > 0)$
- $\frac{a}{b} > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$
 $\frac{a}{b} < 0 \iff (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b > 0)$

Valor absoluto

DEFINICIÓN

Sea $a \in \mathbb{R}$. El valor absoluto a , denotado $|a|$, se define:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo.

1. $|4| = 4$, $|0| = 0$, $|-5| = -(-5) = 5$,
2. Si $a < 2$ entonces $|a - 2| = -(a - 2) = 2 - a$

Propiedades

- a) $|a| \geq 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
 $|a| = 0 \iff a = 0$
- b) $|-a| = |a|$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
- d) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Otras propiedades.

- e) $|a|^2 = a^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- f) $\sqrt{a^2} = |a|$

Nota 1

Geomtricamente, $|a|$ representa la distancia del punto P que se identifica con a , al origen 0.

Nota 2

Sean a y b dos números reales, ubicados en la recta real. La distancia entre a y b está dada por $|a - b|$, que es igual a $|b - a|$.