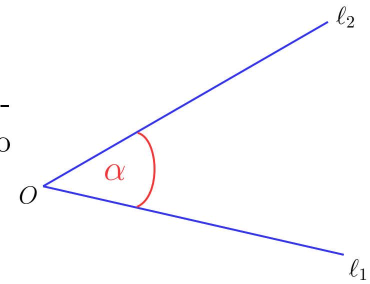
Trigonometría en triángulos

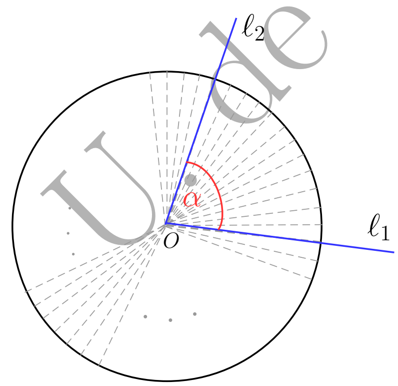
Ángulos

Un ángulo es una porción del plano que está delimitada por dos segmentos de rectas que se intersectan en un punto, el cual es llamado origen.



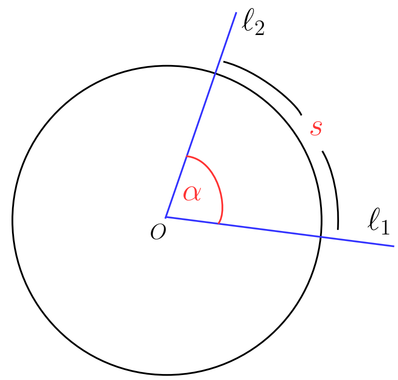
Para medir ángulos, usaremos dos sistemas de medición; el sistema sexagesimal (grados) y el sistema circular (radianes).

- **Sexagesimal**: Para medir un ángulo en el sistema sexagesimal procedemos como sigue. Consideremos el círculo unitario y dividamos este en 360 partes. Luego, sobre-ponemos el ángulo α que queremos medir, ubicando el origen en el centro del círculo, como se muestra en la siguiente figura



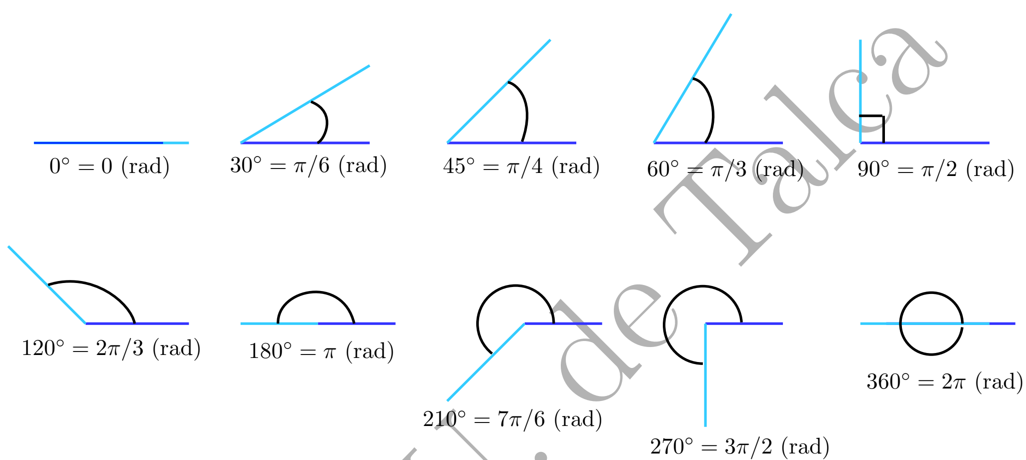
  Luego, la medida del ángulo α, en grados, es la cantidad de estas partes que están comprendidas entre los segmentos ℓ_1 y ℓ_2

- **Circular**: Para medir un ángulo en el sistema circular procedemos como sigue. En la circunferencia unitaria sobre-pongamos el ángulo α de modo que el origen corresponda con el centro de la circunferencia



La medida de α, en radianes, corresponde a la longitud del arco s determinada por los segmentos ℓ_1 y ℓ_2

Algunos ejemplos



Para pasar de un sistema de medición a otro, usaremos la proporción directa:

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{\alpha}{s}$$

Es decir, para pasar de **grados a radianes** usaremos la relación

$$s = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}$$

Para pasar de **radianes a grados** usaremos la relación

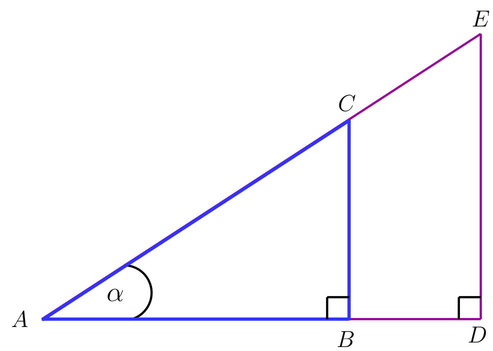
$$\alpha = s \cdot \frac{180°}{\pi}$$

Práctica 1 *Completar la siguiente tabla*

grados	0		15		35	75			150	240		300	315	
radianes	0	$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{8}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{4}$			$\frac{4\pi}{3}$			$\frac{11\pi}{6}$

Razones trigonométricas

Consideremos dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo α

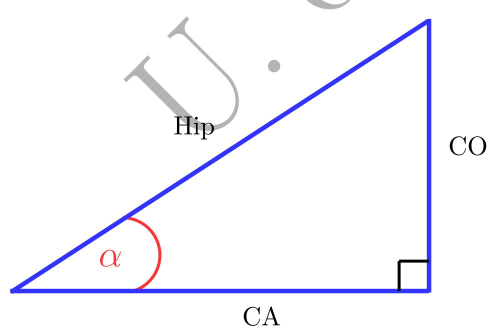


Como los triángulos ABC y ADE son semejantes, tenemos, por ejemplo, las siguientes proporciones

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \ , \ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \ , \ \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \ , \ \text{etc} \ \ldots$$

Es decir, estas razones no dependen del triángulo que se considere y sólo dependen del ángulo α. Así, tenemos la siguiente definición.

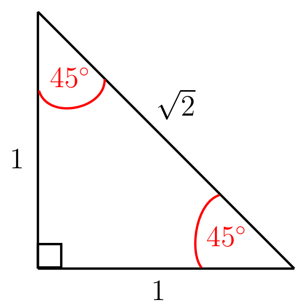
Definición 1 (Razones trigonométricas) *Consideremos un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudo igual a α. Respecto a α, los lados del triángulo reciben los nombres de "cateto opuesto"* (CO), *"cateto adyacente"* (CA) *e "hipotenusa"* (Hip), *como se indica en la siguiente figura*

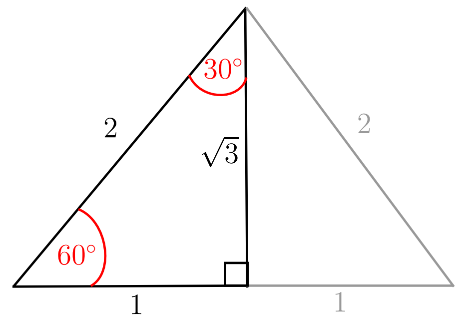


Con estas notaciones, se definen las razones trigonométricas:

Seno:	$\sin(\alpha) = \dfrac{\text{CO}}{\text{Hip}}$	***Cosecante:***	$\csc(\alpha) = \dfrac{\text{Hip}}{\text{CO}}$
Coseno:	$\cos(\alpha) = \dfrac{\text{CA}}{\text{Hip}}$	***Secante:***	$\sec(\alpha) = \dfrac{\text{Hip}}{\text{CA}}$
Tangente:	$\tan(\alpha) = \dfrac{\text{CO}}{\text{CA}}$	***Cotangente:***	$\cot(\alpha) = \dfrac{\text{CA}}{\text{CO}}$

Calcular los valores de las razones trigonométricas para ángulos arbitrario, no es sencillo. En el curso trabajaremos, principalmente, con algunos ángulos agudos notables, para los cuales no es difícil realizar los cálculos, como mostramos a continuación. Consideramos un triángulo rectángulo isósceles con la medida de los catetos igual a 1, y un triángulo equilátero de lado 2





Luego, tenemos que

RT \ α	30°	45°	60°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Table 1: Valores frecuentes para las razones trigonométricas principales

Desde la definición note que

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}, \quad \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad \text{y} \quad \csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

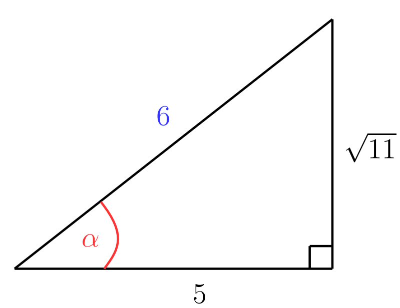
luego, es inmediato cómo obtener los valores para estas razones trigonométricas a partir del cuadro anterior.

Nota: Con el motivo de trabajar en situaciones más realistas, en ocasiones, tendremos que calcular razones trigonométricas para ángulos distintos a los que aparecen en el cuadro anterior. En este caso usaremos la calculadora para realizar estos cálculos, considerando una proximación de dos decimales.

Ejemplo 1 (Encontrar razones trigonométricas) *Supongamos que α es un ángulo agudo tal que $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{11}}{5}$. Con esta información, deberíamos ser capaces de encontrar los valores de las restantes razones trigonométricas construyendo un triángulo rectángulo con estas características (usamos Pitágoras para encontrar la medida de la hipotenusa)*

Del triángulo, se tiene que

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{11}}{6} \qquad \csc(\alpha) = \frac{6}{\sqrt{11}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{5}{6} \qquad \sec(\alpha) = \frac{6}{5}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{11}}{5} \qquad \cot(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{11}}$$



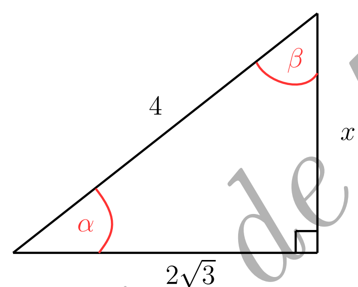
Práctica 2 *Supongamos que α es un ángulo agudo tal que $\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Luego*

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \tfrac{2}{\sqrt{13}} & \qquad \csc(\alpha) &= \\ \cos(\alpha) &= & \qquad \sec(\alpha) &= \\ \tan(\alpha) &= & \qquad \cot(\alpha) &= \end{aligned}$$

Completación de triángulos rectángulos

Completar un triángulo rectángulo significa encontrar cada una de sus partes (tres lados y dos ángulos), dada la información precisa y suficiente de este. Por ejemplo, dado dos lados, o bien, un lado y un ángulo agudo, podemos obtener el resto de las parte de este triángulo rectángulo usando las razones trigonométricas.

Ejemplo 2 *Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo con uno de sus cateto de medida $2\sqrt{3}$ e hipotenusa de medida 4.*



Notemos que α es tal que $\cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Del Cuadro 1 *tenemos entonces que $\alpha = 30°$ y luego $\beta = 60°$. Para encontrar el valor de x podemos usar el hecho que*

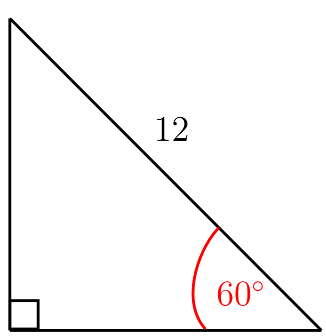
$$\frac{1}{2} = \sin(30°) = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{2} = 2$$

También podríamos haber usado el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de x.

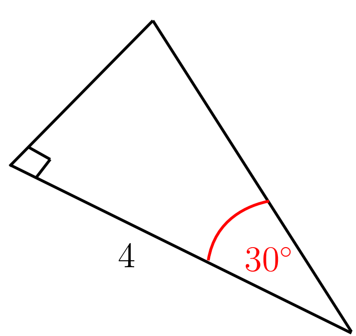
$$x^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2 \;\Rightarrow\; \quad x^2 = 16 - 12 = 4 \quad \Rightarrow\; x = 2$$

Práctica 3 *Completar los siguientes triángulos*

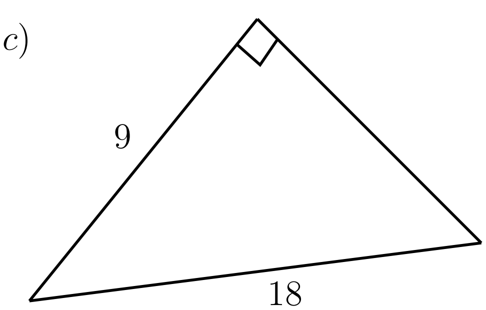
a)



b)

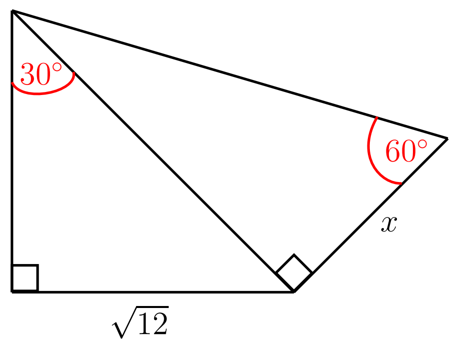


c)

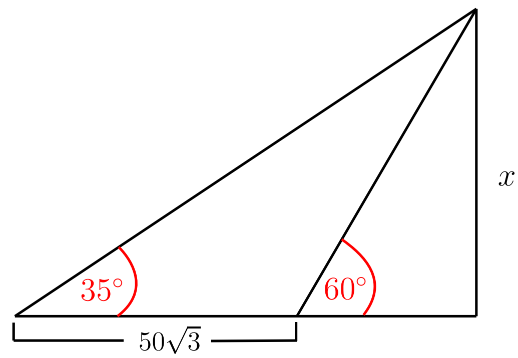


Práctica 4 *Encontrar el valor de x en cada caso*

a)



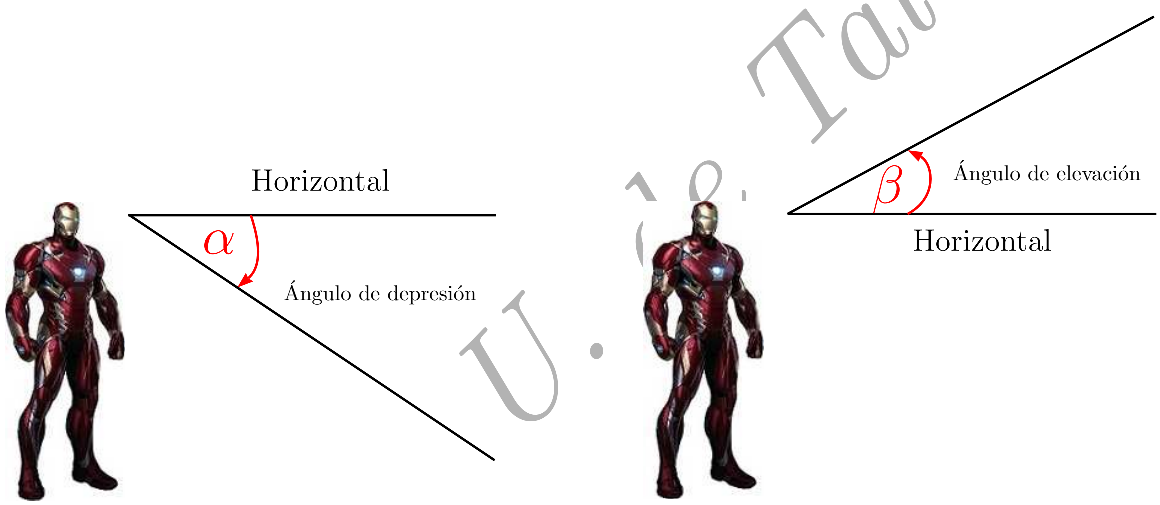
b)



Para (b) use la aproximación $\tan(35°) \approx 0,7$

Trigonometría en problemas de aplicación

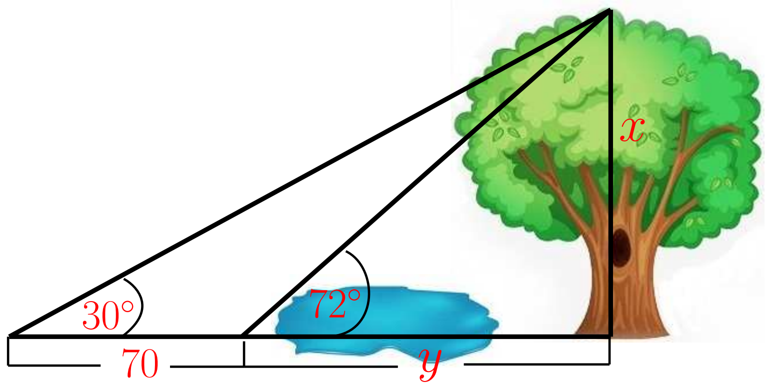
En lo que sigue usaremos el siguiente lenguaje:



En los problemas que trabajaremos a continuación (y en la práctica) consideraremos que los ángulos de elevación y depresión son medidos por un observador hipotético con altura despreciable (a menos que se diga lo contrario).

Ejemplo 3 *Un día cualquiera, Cristian, se propuso obtener la medida del árbol más alto de Curicó. Lamentablemente, justo antes del árbol hay un río que impide realizar mediciones. Esto no detuvo las ganas de Cristian de obtener este interesante dato, pues recordó que puede lograrlo usando un teodolito (instrumento topográfico para medir ángulos) y sus conocimientos de trigonometría.*

Así, Cristian se ubicó a una cierta distancia del árbol y, con su teodolito, midió un ángulo de elevación, hasta la punta del árbol, de $30°$*. Luego, avanzó 70 mts hacia el árbol (justo donde comienza el río) y, realizando otra medida con su teodolito, obtuvo un ángulo de elevación, hasta la punta del árbol, de* $72°$*. Con esta información, Cristian realizó la siguiente ilustración para ordenar sus cáculos:*



De este modo, él notó que las ecuaciones

$$\begin{array}{cccc|} (1) & \tan(30°) & = & \dfrac{x}{70+y} \\ (2) & \tan(72°) & = & \dfrac{x}{y} \\ \hline \end{array}$$

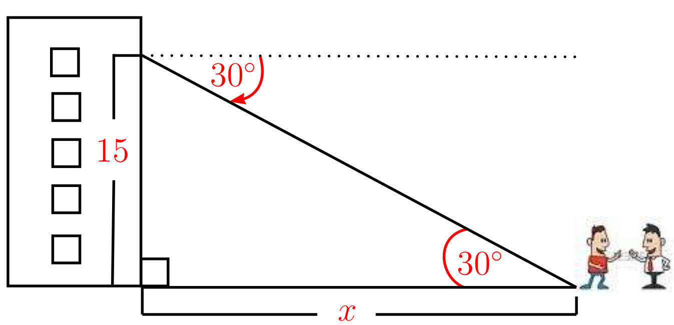
resuelven su problema. En efecto, de (2) *tenemos que* $y = \dfrac{x}{\tan(72°)}$. *Reemplazando esto en* (1) *se tiene que*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(30°) = \frac{x}{70 + \frac{x}{\tan(72°)}}$$

De lo cual, se obtiene que la altura del árbol es $x = \dfrac{70}{\sqrt{3} - \dfrac{1}{\tan(72°)}} \approx 49,746$ *mts.*

Ejemplo 4 *Desde el quinto piso de un edificio, a* 15 *mts de altura, noto que se acerca, hacia el edificio, mi vecino que habita el primer piso. En un instante se detiene a conversar con un amigo y alcanzo a observar que el ángulo de depresión hasta donde está él es de* 30°. *Considerando que un ser humano promedio camina a una velocidad de* 5 *km/hrs, ¿Cuánto tardará mi vecino en llegar a su hogar?*

La situación se puede ilustrar de la siguiente manera



Luego, tenemos que $\tan(30°) = \dfrac{15}{x}$ *o equivalentemente*

$$x = \frac{15}{\tan(30°)} \ mts \ = 15\sqrt{3} \ mts$$

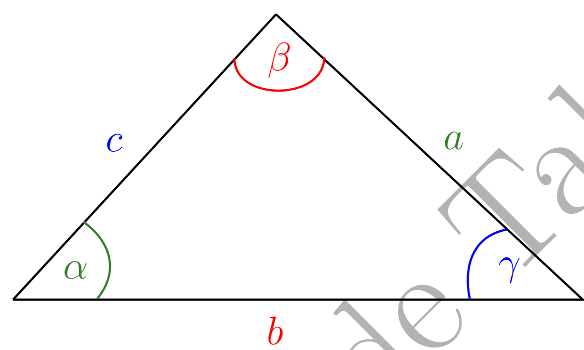
Por lo tanto, lo que tardar mi vecino en llegar a su hogar es

$$\frac{15\sqrt{3}}{5000} \ hrs \ \approx 18,7 \ seg$$

Teorema del Seno y del Coseno

A continuación usaremos las funciones trigonométricas para completar (o resolver) triángulos a un nivel más general. En particular, esto nos permitirá resolver problemas de aplicación que no solo involucren situaciones con triángulos rectángulos, si no que, cualquier situación que pueda representarse con un triángulo (y cierta información) va a poder ser resuelta usando la ley de Seno o la ley de Coseno.

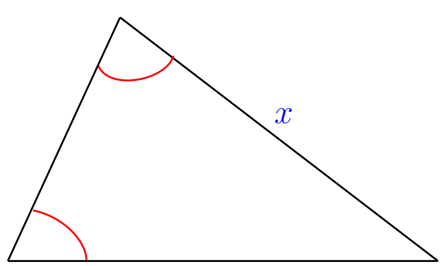
Teorema 1 (Ley del Seno) *Consideremos el triángulo*



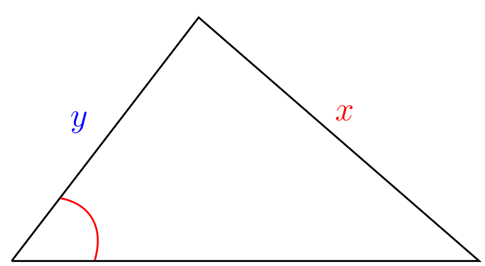
Entonces, se tiene que

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

El Teorema del Seno puede ser usado para completar triángulos cuya información conocida sea como alguna de las dos situaciones siguientes



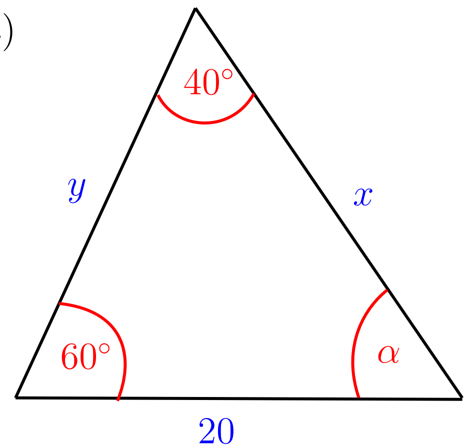
Dos ángulos y un lado



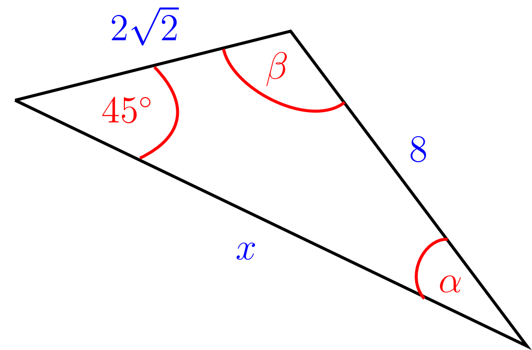
Dos lados y un ángulo opuesto a de los lados conocidos

Ejemplo 5 *Completaremos los siguientes triángulos usando el teorema del Seno.*

a)



b)



Para completar el triángulo a) notemos primero que, como la suma de ángulos interiores de un triángulo es $180°$*, se tiene* $\alpha = 80°$*. Ahora, usando la ley del Seno obtenemos que*

$$\frac{\sin(60°)}{x} = \frac{\sin(40°)}{20} \quad \wedge \quad \frac{\sin(80°)}{y} = \frac{\sin(40°)}{20}$$

Luego

$$x = \frac{20\sin(60°)}{\sin(40°)} \approx 27 \quad \wedge \quad y = \frac{20\sin(80°)}{\sin(40°)} \approx 30,64$$

Para completar el triángulo b), comenzaremos por encontrar α *usando la relación:*

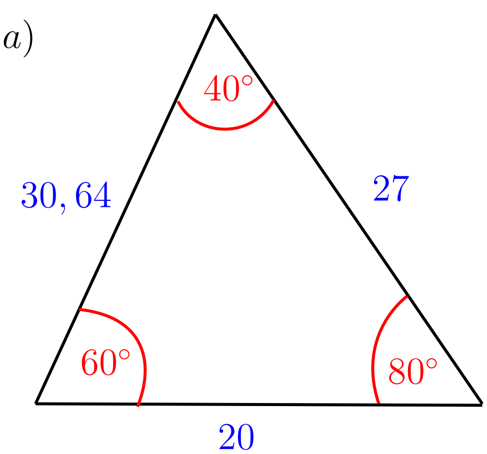
$$\frac{\sin(45°)}{4} = \frac{\sin(\alpha)}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 4} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

Luego, α *es un ángulo agudo tal que* $\sin(\alpha) = 1/2$*. Del Cuadro 1 podemos notar que* $\alpha = 30°$*. De esto obtenemos inmediatamente que* $\beta = 105°$*. Finalmente, si usamos nuevamente la ley del Seno:*

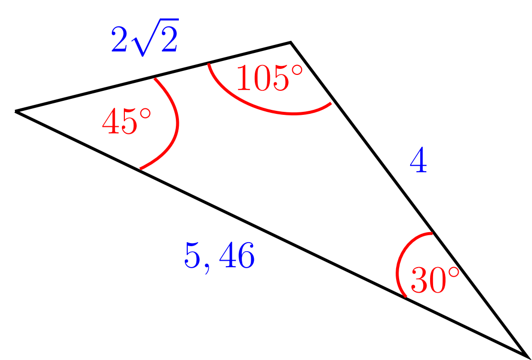
$$\frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\sin(45°)}{4} = \frac{\sin(105°)}{x} \Rightarrow x = \frac{8\sin(105°)}{\sqrt{2}} \approx 5,46$$

Así, los triángulos nos quedan:

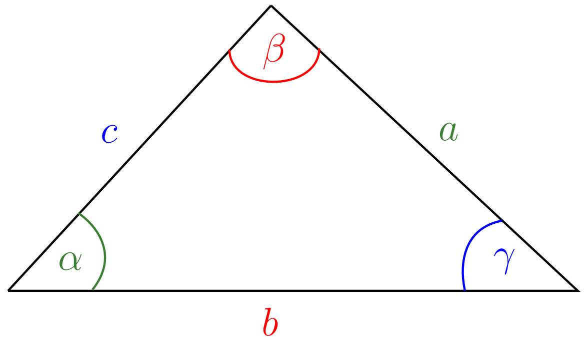
a)



b)



Teorema 2 (Ley del Coseno) *Consideremos el triángulo*



Entonces, se tiene que

$$(1)\;\; a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$(2)\;\; b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

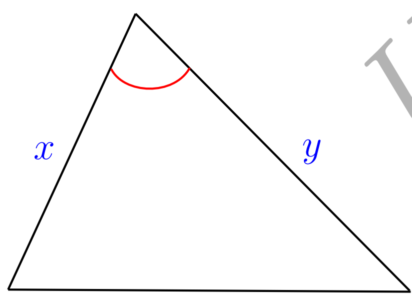
$$(3)\;\; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

En particular, si, por ejemplo $\alpha = 90^\circ$, entonces obtenemos la relación Pitagórica

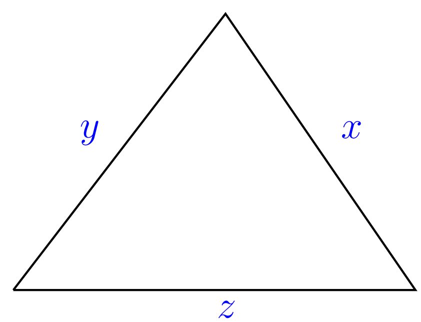
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Es decir, el teorema del Coseno se puede considerar como una generalización del teorema de Pitágoras.

El Teorema del Coseno puede ser usado para completar triángulos cuya información conocida sea como alguna de las dos situaciones siguientes



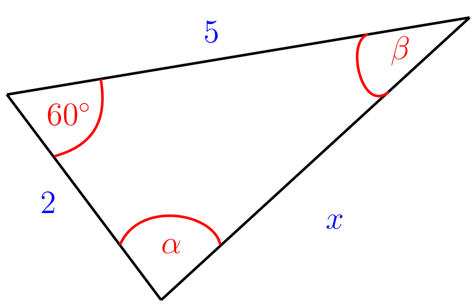
Dos lados y el ángulo entre ellos



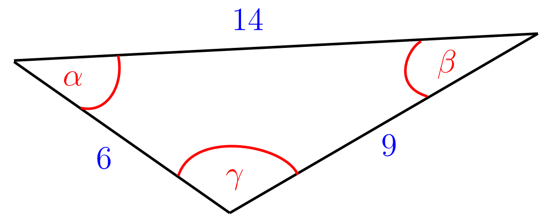
Tres lados

Ejemplo 6 *Completaremos los siguientes triángulos usando el teorema del Coseno.*

a)



b)



Para el triángulo a) note que tenemos la relación

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cos(60^\circ) \\ x^2 &= 29 - 20 \cdot \frac{1}{2} \\ x^2 &= 19 \end{aligned}$$

Como $x > 0$*, tenemos que* $x = \sqrt{19}$*. Para calcular el valor de* α *podríamos usar la relación*

$$5^2 = 2^2 + (\sqrt{19})^2 - 2\sqrt{19}\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{19}}$$

Para calcular el ángulo α *que satisface esta condición usaremos en la calculadora la función* $\cos^{-1}$*, es decir*

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{19}}\right) \approx 103,26^\circ$$

Notemos que para encontrar el ángulo α *también podríamos haber usado la ley del Seno, de la relación*

$$\frac{\sin(\alpha)}{5} = \frac{\sin(60^\circ)}{\sqrt{19}}$$

Se deja de ejercicio al lector verificar que coincide con el cálculo anterior*. Finalmente, como la suma de ángulos interiores de un triángulo es* 180°*, tenemos que* $\beta \approx 16,74^\circ$*.*

Para completar el triángulo b) comenzaremos por calcular el ángulo γ *usando la ley de Coseno:*

$$14^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9\cos(\gamma) \Leftrightarrow \cos(\gamma) = -\frac{79}{108}$$

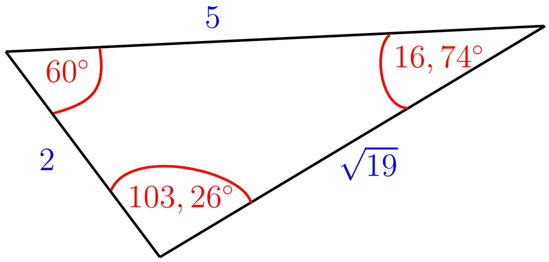
Usando en la calculadora la función $\cos^{-1}$*, tenemos que* $\gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{79}{108}\right) \approx 137^\circ$*. Similarmente, para encontrar* α *podemos usar la relación:*

$$9^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6\cos(\alpha) \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{151}{168}$$

De lo cual obtenemos que $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{151}{168}\right) \approx 26^\circ$*. Finalmente, por suma de ángulos interiores tenemos que* $\beta \approx 17$*.*

Así, los triángulos nos quedan:

a)



b)