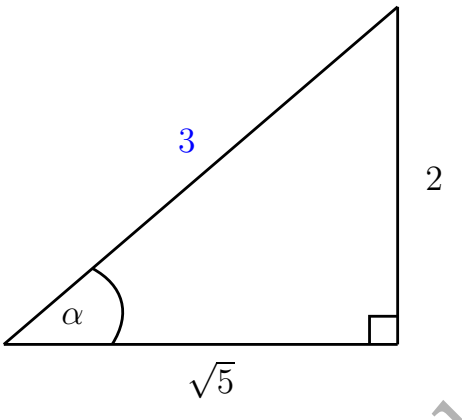
1. Si $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, calcular el valor de: $(\sec\alpha)^2 - 2\left(1 + \dfrac{(\tan\alpha)^2}{2}\right) + (\csc\alpha)^2$

Solución: Usando el hecho que $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, podemos construir un triángulo rectángulo para encontrar el valor de las razones trigonométricas para α



Luego

$$\sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}},\ \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{ y }\ \csc\alpha = \frac{3}{2}$$

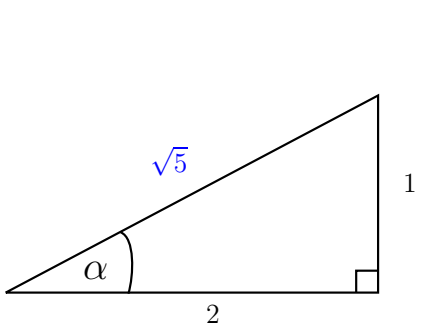
Así, concluimos que

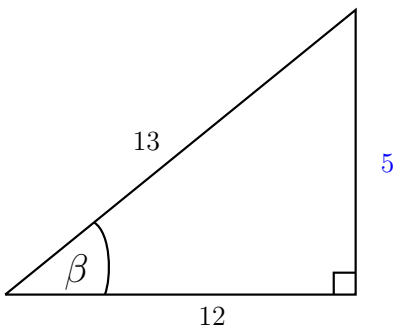
$$(\sec\alpha)^2 - 2\left(1 + \frac{(\tan\alpha)^2}{2}\right) + (\csc\alpha)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

2. Sean α y β dos ángulos agudos tales que $\cot\alpha = 2$ y $\cos\beta = \dfrac{12}{13}$. Calcular

$$6(\cos\alpha)^2\tan\beta - 5\tan(45°)(\csc\beta - (\sin\alpha)^2) + \sec(60°)$$

Solución: Primero realizaremos dos triángulos rectángulos, usando la información proporcionada, para encontrar los valores de las razones trigonométricas para α y β. Tenemos





U. de Talca

Luego

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \tan\beta = \frac{5}{12},\ \csc\beta = \frac{13}{5},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Además, sabemos que $\tan(45°) = 1$ y $\sec(60°) = 2$. Así, tenemos que

$$6(\cos\alpha)^2\tan\beta - 5\tan(45°)(\csc\beta - (\sin\alpha)^2) + \sec(60°)$$

$$= 6\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \frac{5}{12} - 5\left(\frac{13}{5} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right) + 2$$

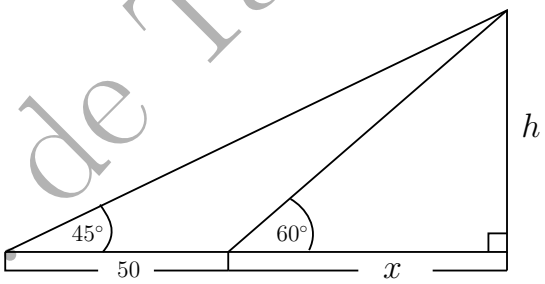
$$= 6 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12} - 5\left(\frac{13}{5} - \frac{1}{5}\right) + 2$$

$$= -8$$

3. Un hombre observa la cumbre de una montaña con un ángulo de elevación de 45°, en seguida avanza 50 metros y observa la cumbre con un ángulo de elevación de 60°. ¿Cuál es la altura de la montaña?

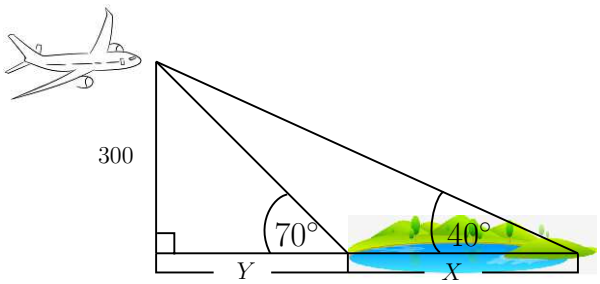
Solución: De la ilustración se tiene que:

- $\tan(45) = \dfrac{h}{x+50}$ (1)
- $\tan(60) = \dfrac{h}{x}$ (2)



Luego, de (1) : $1 = \dfrac{h}{x+50} \Longrightarrow h = 50 + x$. De (2) : $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x} \Longrightarrow x = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$. Así, $h = 50 + \dfrac{h}{\sqrt{3}}$, para finalmente obtener: $h = \dfrac{50\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

4. Desde un avión situado a 300 metros sobre el nivel del suelo se hacen observaciones de un lago obteniendo los resultados que se muestran en la siguiente figura



U. de Talca

Calcular la longitud del lago.

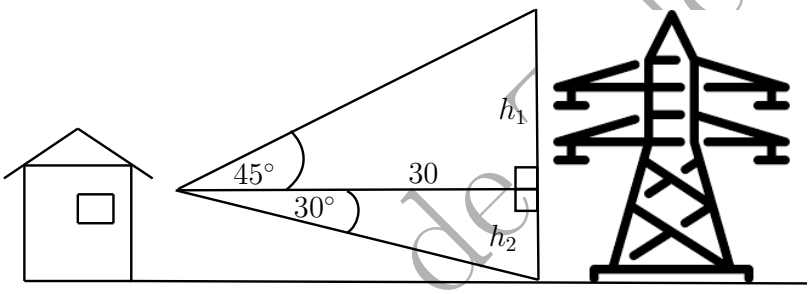
Solución: Se debe calcular la longitud indicada por X (longitud del lago) en la figura. Para ello, en primer lugar se calcula la longitud Y, y con este valor se encuentra el valor de X:

- Cálculo de Y: $\tan 70° = \dfrac{300}{Y}$. De donde $Y = 109.2$m
- Cálculo de X: $\tan 40° = \dfrac{300}{Y+X} = \dfrac{300}{109.2+X}$. De donde $X = 248.3m$.

Por lo tanto la longitud del lago es de $248.3m$.

5. María Ignacia vive en una casa de dos pisos. Desde una ventana del segundo piso de su casa, María Ignacia observa una torre eléctrica y nota que el ángulo de depresión a la parte inferior de éste es 30° y el ángulo de elevación a la parte superior es de 45°. Si la distancia de la casa al árbol es 30 metros, determine la altura de la torre.

   Solución: La situación se puede ilustrar de la siguiente manera



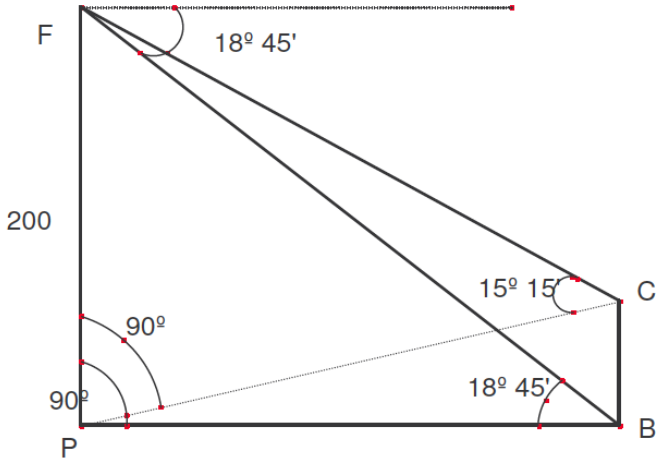
   Luego, tenemos las relaciones:

$$(1) \quad 1 = \tan(45°) = \frac{h_1}{30}$$
$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(30°) = \frac{h_2}{30}$$

   De (1) tenemos que $h_1 = 30$ y de (2) se tiene $h_2 = 30/\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$. Así, concluimos que la altura de la torre es de $h_1 + h_2 = 30 + 10\sqrt{3}$ mts.

6. Desde F, el punto más alto de un faro situado a 200 mts sobre el nivel del mar, se divisa un barco B, con ángulo de depresión igual a $18°45'$. Cinco minutos más tarde la posición del barco es C y se divisa desde F bajo un ángulo de $15°15'$. Calcular la velocidad del barco sabiendo que la trayectoria CB es perpendicular a la PB, siendo P el pie del faro.

   Solución: Los triángulos FPB y FPC son rectángulos en P y el PBC es rectángulo en B



B y C están en el mismo plano, en el mar.

- En el $\triangle FPB$:

$$\frac{200}{PB} = \tan(18°45') \Longrightarrow PB = \frac{200}{\tan(18°45')} = 589,2\,\text{mts}$$

- En el $\triangle FPC$:

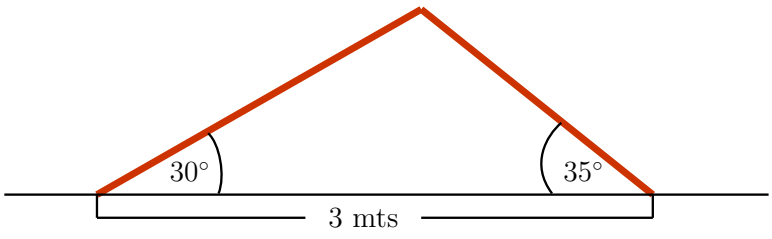
$$\frac{200}{PB} = \tan(15°15') \Longrightarrow PB = \frac{200}{\tan(15°15')} = 733,6\,\text{mts}$$

- En el $\triangle PBC$

$$BC = \sqrt{PC^2 - PB^2} = \sqrt{191.012,32} = 437,05\,\text{mts}$$

El espacio recorrido es de $437,05$ mts en 5 minutos, luego la velocidad es $v = 5,245$ km/h.

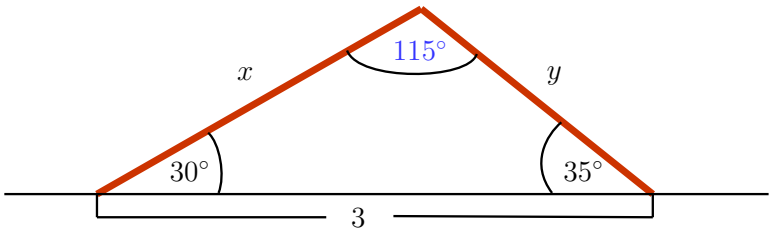
7. Durante una tormenta eléctrica, un poste de luz es impactado por un rayo dejando a este formando un triángulo con su parte superior e inferior tocando el suelo, como se muestra en la siguiente ilustración



Para poder construir uno de las mismas característica se necesita saber su altura. Con la información proporcionada, ¿es posible saber este dato?.

Solución: Notemos que el ángulo que se encuentra donde está quebrado el poste mide 115°. Luego, el triángulo nos queda como sigue

U. de Talca



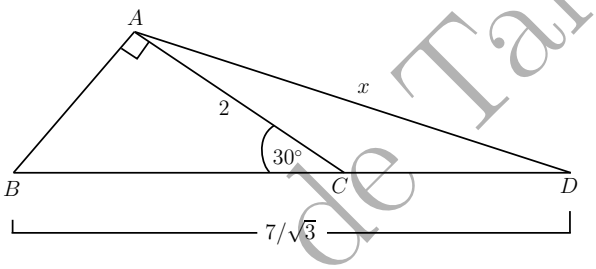
Ahora, podemos usar el teorema del Seno para encontrar la medida de las dos partes que forman el poste, x e y. Tenemos

$$\frac{x}{\sin(35°)} = \frac{3}{\sin(115°)} = \frac{y}{\sin(30°)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3\sin(35°)}{\sin(115°)} \approx 1,9\ ,\ y = \frac{3\sin(30°)}{\sin(115°)} \approx 1,7$$

Así, la medida del poste es de $x + y = 1,9 + 1,7 = 3,6$ mts.

8. Encontrar el valor de x en la siguiente situación



Solución: Supongamos que la medida del lado $\overline{AB}$ es y. Como el triángulo ABC es rectángulo, tenemos la relación

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(30°) = \frac{y}{2}.$$

De lo cual se obtiene que $y = 2/\sqrt{3}$. Ahora, podemos usar el teorema del coseno para encontrar el valor de x:

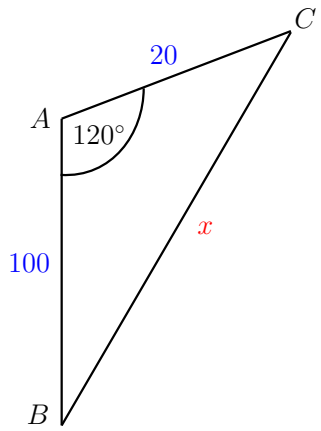
$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cos(60°) \\ x^2 &= 13 \end{aligned}$$

es decir, $x = \sqrt{13}$.

9. Un barco sale del puerto a las 1 pm, viajando hacia al Norte a una velocidad constante de 40 mi/hrs. A las 3 : 30 pm el barco cambia su curso en 60° de Norte a Este. ¿A qué distancia del puerto se encuentra el barco a las 4 : 00 pm?

Solución: La situación queda ilustrada en el siguiente triángulo

U de Talca



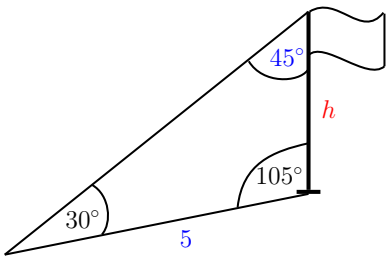
En las primeras dos horas y media el barco recorre 100 milla y en la siguiente media hora recorre 20 milla. Así tenemos que la medida del lado $\overline{AB}$ es 100 y la medida del lado $\overline{AC}$ es 20. Luego, podemos usar el teorema del coseno para encontrarla la distancia x:

$$\begin{aligned} x^2 &= 100^2 + 20^2 - 2 \cdot 100 \cdot 20 \cos(120°) \\ x^2 &= 12400 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia del barco hasta el puerto, cuando son las 4 : 00 pm, es de $x = \sqrt{12400} \approx 111,36$ millas.

10. Miguel es un joven que estudia en un colegio ubicado en el cerro Alegre de Valparaíso. Él quiere saber cuánto mide el astabandera que está en su colegio y para esto el consiguió los siguientes datos; el astabandera forma un ángulo de 105° con el suelo (a desnivel). Además, cuando él está parado a una distancia de 5 mts desde el astabandera, el ángulo de elevación desde el punto donde se encuentra Miguel hasta la punta del astabandera es de 30°.

Solución: La situación se puede representar con el siguiente triángulo



Para encontrar h podemos usar el teorema del seno, como sigue

$$\frac{h}{\sin(30°)} = \frac{5}{\sin(45°)} \Leftrightarrow h = \frac{5\sin(30°)}{\sin(45°)} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54$$

Es decir, el astabandera mide, aproximadamente, 3, 54 mts.

U de Talca